Revista

Educação Matemática

Em foco

V. 1 - Nº 1 | Jan/Jun 2012

Revista

Educação Matemática

Em foco

V. 1 - Nº 1 | JAN/JUN 2012

Universidade Estadual da Paraíba

Profª. Marlene Alves Sousa Luna
Reitora

Prof. Aldo Bezerra Maciel
Vice-Reitor

eduepb

Editora da Universidade Estadual da Paraíba

Diretor	Cidoval Morais de Sousa
Coordenação de Editoração	Arão de Azevedo Souza
Editoração Eletrônica	Leonardo Ramos Araujo
Capa	Dudu Moura
Ilustração da capa	Maria da Conceição Vieira Fernandes
Comercialização e Divulgação	Júlio Cézar Gonçalves Porto Zoraide Barbosa de Oliveira Pereira

Depósito legal na Biblioteca Nacional, conforme decreto nº 1.825, de 20 de dezembro de 1907.
FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL - UEPB

410
R454 Revista Educação Matemática em Foco – 2012 - Campina Grande: EDUEPB,
v. 1, n.1, jan./jun 2012.

Semestral

Editores: Abigail Fregni Lins, Kátia Maria de Medeiros,
Silvanio de Andrade.

ISSN - **1981.6979**

1. Matemática. 2. Educação Matemática. 3.Etnomatemática. 4. Geometria Espacial.

21. ed. CDD

Editora filiada a ABEU

EDITORA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Rua Baraúnas, 351 - Bairro Universitário - Campina Grande-PB - CEP 58429-500
Fone/Fax: (83) 3315-3381 - http://eduepb.uepb.edu.br - email: eduepb@uepb.edu.br

Sumário

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

EDITORIAL

Com o crescimento das pesquisas produzidas em Educação Matemática, sentimos a necessidade de mais uma Revista, de alto nível, que possa contribuir para a publicação das pesquisas na área, em âmbito nacional e internacional. Iniciamos sua publicação com este Número, zero. A Revista chama-se Revista Educação Matemática em Foco, sendo Educação Matemática em Foco o Boletim da área de Educação Matemática da UEPB, criado em 2006 e com circulação até 2011. A Revista tem o mesmo ISSN do Boletim, uma vez que consideramos mais proveitoso termos apenas uma publicação para melhor nos dedicarmos a ela.

Teremos uma publicação a cada semestre. Este primeiro número conta com sete artigos escritos por pesquisadores especialmente convidados para iniciar a nossa Revista. No Número 1 teremos três artigos de pesquisadores convidados, mas já estaremos recebendo submissões a serem enviadas para dois pesquisadores do Conselho de Pareceristas, sem identificação, para avaliação.

Neste Número, o artigo intitulado Tarefas de Exploração e Investigação na Aula de Matemática, os autores João Pedro da Ponte, Marisa Quaresma e Neusa Branco do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, procuram mostrar que, em termos curriculares, as tarefas de exploração e investigação matemática podem ser integradas no cotidiano da sala de aula de Matemática ao invés de constituírem um trabalho periférico.

Barbara Jaworski e Janette Matthews, da Universidade de Loughborough, Reino Unido, em seu artigo How we teach university Mathematics: teachers talk about what they do abordam o modo como ensinamos, em uma série de seminários apresentados por matemáticos e educadores matemáticos, enfocando o ensino da Matemática para os matemáticos e para os estudantes de Engenharia.

O artigo Heidegger, Hebel e Educação Matemática, de John Andrew Fossa, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, a partir da exegese feita por Martin Heidegger sobre o poeta alemão Johann Peter Hebel. As conclusões são eliciadas como o conceito fundamental (construção de esquema) do construtivismo não é inteligível; o professor não pode fazer com que o aluno teorize, nem pode ter certeza se, ou não, o aluno teorizou nas suas atividades, independente do que o professor faça; e, é impossível, em princípio, distinguir entre a Compreensão Instrumental e Relacional (no sentido de Skemp).

Ubiratan D'Ambrósio, da Universidade Bandeirante de São Paulo, em seu artigo Do Saber Matemático ao Fazer Pedagógico: O Desafio da Educação, levanta perguntas que propiciam a reflexão sobre a produção do conhecimento matemático, a atividade do matemático e do professor de Matemática, do educador matemático, do porque ensinarmos Matemática, bem como o papel das calculadoras e do computador no ensino de Matemática atual.

Já Wanderleya Nara Gonçalves Costa, da Universidade Federal de Mato Grosso, em seu artigo Um espelho para a Etnomatemática: os artigos da área em periódicos nacionais de Educação Matemática, discute a questão de como a Etnomatemática tem-se apresentado nos trabalhos publicados em periódicos nacionais de Educação Matemática, com o objetivo de enfatizar a importância dos periódicos científicos e apresentar os resultados das análises de artigos sobre Etnomatemática publicados nos últimos vinte e cinco anos.

Por outro lado, Maria do Carmo Santos Domite, da Universidade de Sâo Paulo, em seu artigo, Acertando o passo do movimento entre etnomatemática, formação de professores e aprendizagem da matemática: pré-requisito dos alunos e escuta dos professores em discussão pretende tornar possível uma aproximação entre etnomatemática e os processos de aprendizagem da Matemática no contexto escolar. No entanto, espera encaminhar tal proposta de um ponto de vista dos estudos etnomatemáticos e não daqueles da psicologia cognitiva. Neste sentido, enfoca em duas noções dos processos da educação e da educação matemática: a noção compreendida por pré-requisito do aluno e a da escuta do professor.

Por último, José Carlos Pinto Leivas, do Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, Rio Grande do Sul, O Cabri 3D na resolução de um problema geométrico trata de uma pesquisa qualitativa realizada com nove alunos de um mestrado em Ensino de Matemática na disciplina de Geometria e busca verificar como esses alunos visualizam uma circunferência como objeto geométrico no espaço geométrico tridimensional. Para alcançar esse objetivo, Leivas utiliza a resolução de problemas como metodologia de ensino e o Cabri 3D como ferramenta computacional para desenvolver habilidades de visualização.

Finalizando, agradecemos imensamente a valiosa colaboração de nossos autores convidados, que muito nos honraram ao aceitar iniciar esta publicação com os seus artigos.

Desejamos a todos uma excelente e frutífera leitura.

Os Editores

Tarefas de exploração e investigação na aula de matemática[1]

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Marisa Quaresma
Escola Básica 2,3 José Saramago, Poceirão, Palmela e
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Neusa Branco
Escola Superior de Educação de Santarém e
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Resumo

Neste artigo procuramos mostrar que, em termos curriculares, as explorações e investigações matemáticas podem ser integradas no dia a dia da sala de aula de Matemática em vez de constituírem um trabalho periférico. Tendo por base dois episódios, um relativo à aprendizagem inicial dos números racionais no 5.º ano e outro relativo à aprendizagem da linguagem algébrica no 7.º ano, mostramos como tarefas deste tipo podem ser apresentadas aos alunos tendo em atenção a necessária interpretação, proporcionar momentos significativos de trabalho autónomo, e conduzir a discussões coletivas muito participadas. Deste modo, são tarefas que proporcionam um funcionamento da sala de aula com características inovadoras em relação ao ensino convencional baseado na exposição de conceitos e procedimentos, apresentação de exemplos e prática de exercícios, e com resultados muito mais positivos em termos de aprendizagem.

Palavras-Chave: Explorações, Investigações, Prática Letiva, Números racionais, Pensamento algébrico.

Abstract

Abstract. In this paper we show that, as a curriculum feature, mathematical explorations and investiga-tions, instead of being just a peripheral activity, may be an integral part of the daily work of the mathe-matics classroom. Based on two episodes, one when students begin learning rational numbers in grade 5 and the other when they learn algebraic language in grade 7, we show how such tasks can be presented to students taking into account the necessary interpretation, provide significant moments of autonomous work, and lead to widely participated group discussions. Thus, we argue that such tasks support an innovative mathematics classroom in relation to formal teaching based on the exposition of concepts and procedures, presentation of examples and practice of exercises, and with much more positive results in terms of students learning.

Keywords. Explorations, Investigations, Teaching practice, Rational numbers, Algebraic thinking.

1 Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

Introdução

O trabalho com tarefas de investigação e exploração na sala de aula constitui uma orientação curricular atual muito importante que tem as suas raízes na perspetiva da resolução de problemas (PÓLYA, 1975). Tal como um problema, uma tarefa de investigação e exploração não é de resolução imediata, requerendo do aluno um esforço de compreensão aprofundado, a formulação de uma estratégia de resolução, a concretização desta estratégia e uma reflexão sobre os resultados obtidos. No entanto, distinguindo-se dos problemas de Matemática que indicam com grande concisão o que é dado e o que é pedido, estas tarefas contêm um elemento de indefinição ou de abertura, requerendo uma atenção especial à sua formulação, por parte de quem os resolve (PONTE, BROCARDO & OLIVEIRA, 2003).

Note-se, porém, que nos problemas clássicos há lugar a momentos de exploração e investigação. É possível colocar hipóteses, particularizando as condições dadas ou formulando conjeturas acerca da possível solução, e analisar quais as consequências. Além disso, muitos problemas permitem que se inventarie todos os casos possíveis, para serem estudados um a um e verificar quais os que satisfazem certa condição. Noutros problemas é possível gerar dados a partir do enunciado e explorar regularidades nesses mesmos dados. No entanto, as tarefas de exploração e investigação têm a característica distintiva de requererem sempre um trabalho atento de interpretação da situação, a precisar ou reformular as questões a investigar e a construir representações apropriadas. Mais do que um contexto para aplicar conceitos já aprendidos, estas tarefas servem principalmente para promover o desenvolvimento de novos conceitos e para aprender novas representações e procedimentos matemáticos.

A resolução de problemas constitui uma importante orientação curricular, que se afirmou sobretudo desde a publicação da *Agenda para a ação* do NCTM (1980, p.1). Neste documento proclamava-se que "a resolução de problemas deve ser o foco da Matemática escolar". Mais tarde, os programas portugueses (ME, 1991, p. 194) diziam que "o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas é um eixo organizador do ensino da Matemática". Como consequência, a "resolução de problemas" ganhou uma conotação positiva entre os professores e os autores de manuais, como correspondendo a uma atividade necessária e importante no ensino da Matemática. No entanto, o seu lugar nas práticas profissionais dos professores revelou-se problemático. Uma das estratégias seguidas por muitos professores foi o estabelecimento de práticas como o "problema da semana" ou o "problema do mês". As aulas continuavam a decorrer como até aí, com a diferença que, de tempos a tempos, num momento especial, se realizava um problema que, com frequência, pouco tinha a ver com o que estava a ser trabalhado nas aulas. Por outro lado, em especial nos primeiros anos, continuaram a usar-se os problemas verbais (*word problems*) de sempre, por vezes com alguma má consciência por se sentir que se tratava de simples exercícios em que era preciso "fazer uma conta", disfarçados de problemas. Começou a sentir-se que a valorização curricular da resolução de problemas não estava a corresponder ao previsto e, perante as dificuldades de concretização produtiva na sala de aula, chegou-se a um impasse (PONTE & CANAVARRO, 2003). Era necessário perceber melhor que tipos de problemas valorizar e como os trabalhar com os alunos.

O uso crescente de instrumentos tecnológicos na sala de aula, em especial o computador, é, provavelmente o principal factor responsável pela divulgação e crescente aceitação das tarefas de exploração e investigação. Na verdade, as tecnologias permitem simular com facilidade situações complexas que, de outro modo, teríamos dificuldade de estudar. Permitem verificar o que acontece num grande número de casos, favorecendo a formulação e teste de conjeturas. Não é por acaso que um interessante artigo que discute de forma aprofundada as possibilidades da tecnologia para o trabalho de cunho investigativo por parte dos alunos tenha sido escrito precisamente por Seymour Papert (1971/1991), o criador da linguagem Logo.

No entanto, mesmo sem tecnologia é possível explorar muitas situações em termos matemáticos. Neste sentido, as explorações e investigações têm muito de modelação – criar uma representação que sirva de base a um modelo matemático da situação dada. Mas também têm uma vertente importante de trabalho matemático como trabalhar com definições, classificar objetos, relacionar propriedades. Os dois termos, exploração e investigação, têm vindo a ser cada vez mais usados, sem que exista uma linha de demarcação nítida entre eles – falamos de investigações quando se trata de tarefas num contexto matemático mais sofisticado com um considerável grau de desafio matemático e de explorações quando se trata de situações que permitem um fácil envolvimento da generalidade dos alunos.

Neste artigo apresentamos duas situações, relatadas em pesquisas recentes, tendo por base trabalho exploratório e investigativo realizado pelos alunos na sala de aula, procurando mostrar como este trabalho se insere de modo natural no processo de aprendizagem de importantes conceitos e representações matemáticas por parte dos alunos. O nosso objetivo é evidenciar que, em vez de constituir um trabalho à parte, as explorações e investigações constituem tarefas que proporcionam um modo de funcionamento da sala de aula com características inovadoras em relação ao ensino convencional em que o professor expõe novos conceitos e procedimentos, apresenta um ou dois exemplos e passa exercícios para os alunos praticarem e memorizarem. Procuramos, sobretudo, evidenciar as aprendizagens que os alunos realizam neste novo contexto de trabalho.

Explorando representações e relações nos números racionais

O estudo. A primeira situação que apresentamos decorre de uma investigação que visa perceber de que modo o trabalho numa unidade de ensino baseada na abordagem de cunho exploratório com as diferentes representações de número racional, nos seus diferentes significados, pode contribuir para a compreensão da noção de número racional e dos conceitos de ordenação, comparação e equivalência de número racional, em alunos do 5.º ano de escolaridade (QUARESMA, 2010). O quadro teórico sustenta-se na abordagem investigativa e exploratória (PONTE, 2005; PONTE, BROCARDO & OLIVEIRA, 2003) e nos estudos sobre números racionais, em especial no que respeita ao papel das diferentes representações (BEHR & POST, 1992). Trata-se de uma experiência de ensino, conduzida pela segunda autora deste artigo no contexto da sua prática profissional usando uma metodologia de observação participante. A recolha de dados inclui dois testes, registos vídeo, registos em diário de bordo, análise das produções dos alunos e entrevistas a vários alunos (antes e depois da experiência).

A tarefa. A tarefa que aqui apresentamos, "Dobras e mais dobras" consta dos materiais de apoio ao novo Programa de Matemática para o 2.º ciclo (MENEZES, RODRIGUES, TAVARES & GOMES, 2008) e foi proposta na primeira aula dedicada ao estudo dos números racionais. Note-se que estes alunos já tinham estudado numerais decimais no 1.º ciclo, bem como operadores fracionários, mas sem usar a representação em fração.

Dobras e mais dobras

1. Encontra três tiras de papel geometricamente iguais. Dobra-as em partes iguais:
   - a primeira em duas;
   - a segunda em quatro;
   - a terceira em oito.

Depois de dobrares cada uma das tiras, representa de diferentes formas as partes obtidas.

2. Compara as partes das três tiras obtidas por dobragem. Regista as tuas conclusões.

3. Em cada uma das tiras, determina a razão entre cada um dos comprimentos das partes obtidas após as dobragens e o comprimento da tira. Regista as tuas conclusões.

Com a realização desta tarefa pretende-se introduzir a linguagem associada aos números racionais em diferentes representações e significados. Assim, foram definidos os seguintes objetivos: (i) representar sob a forma de fração, numeral decimal e percentagem um número racional não negativo; (ii) compreender e usar um número racional na relação parte-todo, medida e razão; (iii) comparar números representados de diferentes formas; e (iv) identificar e dar exemplos de frações equivalentes.

Esta tarefa envolve os significados parte-todo, medida e razão, com grandezas contínuas (segmentos retangulares), sendo apresentada no contexto de tiras de papel. A informação é dada na representação ativa (tiras de papel, ou seja, objetos) e as respostas podem ser dadas nas representações verbal, pictórica, decimal, fracionária ou em percentagem. Na questão 1 é dado o "todo", a tira de papel, e é pedido aos alunos que representem três partes diferentes dessa tira. A questão 2 pede aos alunos que comparem entre si as três partes obtidas na questão anterior, usando a informação existente na representação ativa. Não é pedida uma representação específica, podendo os alunos utilizar a representação que entenderem; contudo, é expectável que usem as representações obtidas na questão anterior para fazerem as comparações pedidas. Na questão 3 é pedido aos alunos que determinem a razão entre o comprimento da tira e o comprimento de cada uma das partes obtidas por dobragem.

Para os alunos em causa, esta tarefa possibilita uma atividade exploratória a vários níveis. A questão 1 começa por ter um carácter de exercício, ao pedir aos alunos para fazerem diversas dobragens, mas de seguida assume um carácter mais aberto ao pedir-lhes para representarem "de diferentes formas", algo que a maioria tem dificuldade em interpretar como sendo uma indicação para usar uma representação decimal, pictórica, verbal ou outra de número racional. A questão 2 pede para comparar diversas tiras e para "tirar conclusões", o que constitui uma indicação muito aberta, susceptível de diversas interpretações. Finalmente, a questão 3 envolve um termo cujo significado não é óbvio ("razão"), bem como um novo apelo a tirar mais conclusões.

O trabalho em sala de aula é realizado em grupo, sendo formados seis grupos de trabalho com quatro ou cinco alunos cada. A professora distribui enunciados das questões individualmente. Primeiro, entrega as questões 1 e 2, dá cerca de 30 minutos para a sua resolução e promove a respetiva discussão em cerca de 25 minutos. Seguidamente, distribui o enunciado da questão 3, dá cerca de 20 minutos para a sua resolução e, durante cerca de 15 minutos, faz-se a discussão coletiva dessa mesma questão. Finalmente, num momento posterior, é feita uma nova discussão bem como a síntese do trabalho realizado. Temos assim diversos ciclos com três momentos diferenciados – apresentação e negociação da tarefa, trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva.

Apresentação da tarefa. Logo no início, os alunos mostram alguma dificuldade em interpretar o enunciado. Deste modo, a realização de cada uma das questões é antecedida por um momento de discussão em que se negoceia na turma o significado dos diversos termos que embaraçam os alunos. Assim, na questão 1, a professora opta por realizar a representação da dobragem da primeira tira em duas em grande grupo. Desenha a tira no quadro, representando também pictoricamente a parte da tira a considerar e, de seguida, pede aos alunos que digam que parte da tira está pintada. Usando a representação verbal, muitos alunos dizem que está pintada "metade da tira". Depois, a professora continua a insistir noutra forma de representar aquela parte e, a partir da representação verbal "metade", alguns alunos sugerem a representação decimal 0,5. A professora pede ainda outras formas de representação e dois alunos indicam a fração "um de dois". Finalmente, como os alunos não indicam mais nenhuma representação, a professora pergunta: "e se eu quisesse representar em percentagem? Também podia?" De imediato, a maior parte diz que é 50%. Esta discussão coletiva inicial representa a negociação de uma parte da primeira questão, que permite a continuação do trabalho.

Trabalho dos alunos. Depois da discussão inicial, que permite ultrapassar as dúvidas existentes, os alunos mostram-se bastante mais motivados e começam rapidamente a trabalhar nos pontos seguintes da questão 1. Durante a sua realização, a professora procura ter a noção do que vai sendo feito nos diversos grupos, mantendo-se atenta às descobertas realizadas e a novas dúvidas que possam surgir. Tendo por referência a situação anterior, os alunos não mostram qualquer dificuldade em chegar a diversas representações de $^1/_4$ da tira e concluem que $^1/_4 = 0{,}25$. No entanto, mostram bastante dificuldade em chegar à representação decimal de $^1/_8$, pois não conseguem encontrar metade de 0,25, mostrando alguma insegurança no uso do sistema de numeração decimal. Após a resolução da questão 1, a professora pede aos alunos que colem as tiras de papel na ficha de trabalho, para conseguirem comunicar à turma as suas descobertas. Assim, as representações ativas (tiras de papel) passam a representações pictóricas, e vão estar na base da resolução das questões 2 e 3.

A resolução da questão 2 também é precedida por uma negociação do trabalho a desenvolver, pois os alunos mostram dificuldade em compreender o que é "comparar as três partes obtidas". A professora começa por mostrar as duas primeiras tiras ($^1/_2$ e $^1/_4$) e pede aos alunos que as comparem. A visualização leva os alunos a concluir que $^1/_4$ é metade de $^1/_2$ e este é o mote para se dar início ao trabalho nos grupos.

Mais adiante, na questão 3, a professora também sente necessidade de ajudar os alunos a compreender o enunciado. Como as tiras de papel têm medidas diferentes, opta por lhes pedir que considerem que todas as que medem 20 cm e, a partir daí, os alunos chegam com facilidade a uma noção informal de razão.

Discussão. No início da discussão coletiva da questão 1, para apoiar a participação dos alunos, a professora pede a cada grupo que afixe no quadro o trabalho que realizou. De seguida, pede ao primeiro grupo que apresente o seu trabalho à turma. Diana, a porta-voz, diz "Na figura B escrevemos: quarta parte; 1 por 4 ($^1/_4$); 1 a dividir por 4; 25% e 0,4".Os alunos se apercebem do erro da colega ao referir que o número decimal que representa esta situação é 0,4. Como nenhum repara no erro, a professora prossegue para a apresentação dos outros grupos e pede a Tiago para apresentar o trabalho desenvolvido pelo seu grupo (Figura 1):

> **Tiago**: Então nós temos: quarta parte; um sobre quatro ($^1/_4$); um a dividir por quatro; 25% e 0,25.
>
> **Professora**: (...) Concordas Diana?
>
> **Diana**: Sim...?
>
> **Turma**: Não! Está mal...
>
> **Professora**: O que é que está mal?
>
> **Rui**: É o 0,25...
>
> **Professora**: Porquê?
>
> **Rui**: Porque é a quarta parte.
>
> **Daniel**: É 0,25 porque é a metade do primeiro. O primeiro era 50, se fizermos a metade é 25.
>
> **André**: Oh professora! Eu acho que é o 0,25 porque é a quarta parte do 100. Porque 25 vezes 4 dá 100.

Figura 1 – Resolução da questão 1a) por Leonor, Rui, Henrique e Tiago.

Note-se como, a seguir à pergunta "porquê?" da professora, diversos alunos (Rui, Daniel, André) apresentam explicações sucessivamente mais refinadas. Nos seis grupos apenas o de Diana comete o erro de "transformar" o denominador da fração em número decimal. Aparentemente, os restantes grupos chegam ao numeral decimal por comparação com o valor anterior e com 100%.

Na terceira tira, todos os grupos usam corretamente a representação verbal, a fração, o quociente e a percentagem. Contudo, em geral, toda a turma mostra dificuldades na representação em numeral decimal. Verificam-se essencialmente dois tipos de erros. Um, como vimos, surge no grupo de Diana que constrói o numeral decimal por transformação do denominador da fração. Outro erro, cometido por alguns grupos, tem origem na dificuldade em determinar a metade de 0,25. Os alunos começam por procurar determinar metade de 25% e obtêm 12,5, só que, depois, mostram dificuldade em obter a metade de 0,25. Os alunos sabem que $^1/_4$ é 0,25, mas, ao fazerem a metade de 0,25, enganam-se e obtêm 12,5 (Figura

2). Este resultado leva-os a entrar em contradição porque acham que este resultado não faz sentido já que a metade de 0,25 deve ser um número menor e, neste caso, 12,5 é maior. Os alunos mostram assim dificuldade na compreensão do sistema de numeração decimal e não se lembram de acrescentar um zero para ficarem com 0,250 e a partir daí chegarem a 0,125.

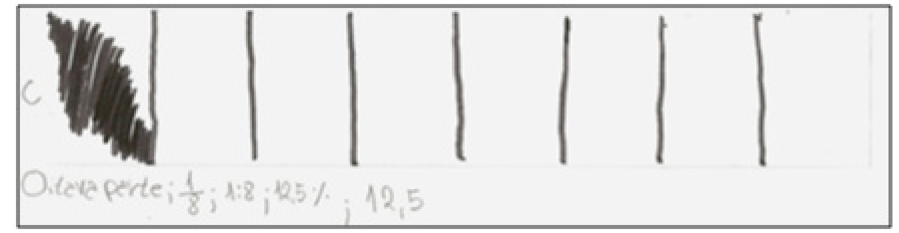


Figura 2 – Resolução da questão 1c) por Leonor, Rui, Henrique e Tiago.

Contudo, durante a discussão da tarefa, os alunos conseguem chegar à resposta correta:

> **Daniel**: É 12,5 % porque a *c* é metade da *b*.
>
> **Professora**: Se o *b* era 25%, o *c* é...
>
> **Daniel**: É a metade que é 12.
>
> **Professora**: É 12%?
>
> **Luís**: Não professora é 12,5%. Porque 12,5+12,5 é 25.
>
> **Professora**: Então e o decimal, como é que fica?
>
> **Tiago**: É 0,125.
>
> (...)
>
> **André**: Pois é 0,125.
>
> **Professora**: Porquê?
>
> **André**: É 0,125 porque é que dá uma unidade inteira.

É Tiago quem indica resposta correta, mas é André que a justifica estabelecendo a relação com a unidade.

Na questão 2, todos os grupos conseguem estabelecer algumas relações entre as partes e só alguns conseguem comparar todas as tiras. Todos os grupos usam apenas a linguagem verbal para exprimir essas relações. Eis um exemplo (Figura 3):

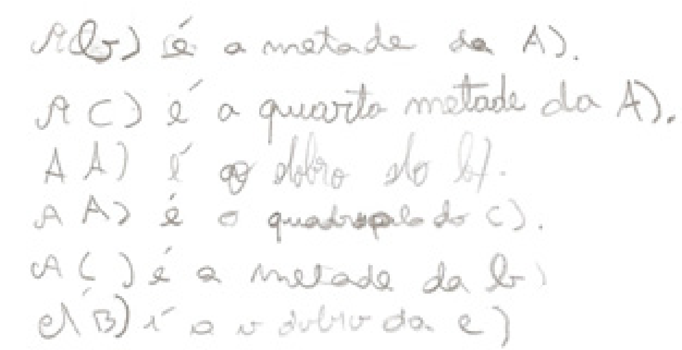


Figura 3 – Resolução da questão 4 por André, Francisco, Rodrigo e Miguel.

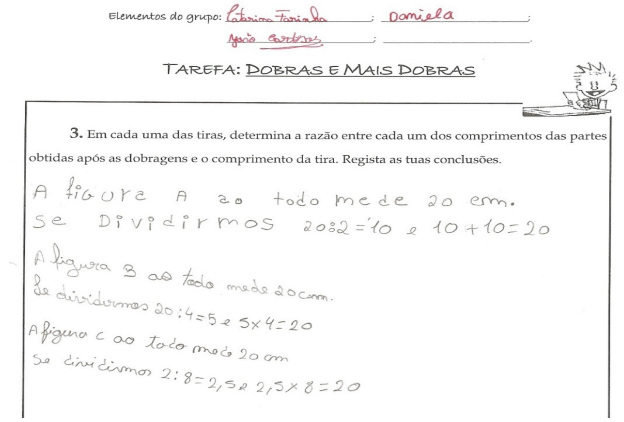
O grupo de André, para além das relações simples, “metade” e “dobro”, estabeleceu relações mais complexas de “quádruplo” (tendo por base “dobro” do “dobro”) e “quarta parte” (“quarta metade” no seu dizer, para significar “metade de metade”). Formulações idênticas foram apresentadas pelo grupo de Mariana. Na discussão desta questão a professora pede a cada grupo que indique uma das relações que encontrou. Como os alunos só usam a representação verbal, pede-lhes, que usem também a linguagem matemática:

> **Daniel**: A relação entre o primeiro e o segundo, é que o segundo é metade do primeiro.
>
> **Professora**: Como é que eu posso escrever isso utilizando números? Como é que eu faço a metade?
>
> **André**: Dividir por 2.
>
> **Rui**: Um de quatro é igual a metade a dividir por 2.
>
> **André**: A *b* é o dobro da *c*.
>
> **Professora**: Como é que eu escrevo isso?
>
> **André:** Um de quatro é o dobro.
>
> **Professora**: Como é que é o dobro?
>
> **André**: Duas vezes…
>
> **Professora**: Duas vezes o quê?
>
> **André**: Um traço oito.
>
> **Professora**: Um oitavo. Um quarto é o dobro de um oitavo.
>
> **Alexandre**: O primeiro é o dobro do segundo.
>
> **Professora**: Como é que eu escrevo isso?
>
> **Alexandre**: Um meio é o dobro de… Um sobre quatro.

É de notar que os alunos usam ainda uma linguagem espontânea para falar das frações (“um de quatro”, “um traço oito”), linguagem esta que a professora vai corrigindo a pouco e pouco.

Apesar das dificuldades apresentadas, os alunos conseguem encontrar as principais relações existentes entre $^1/_2$, $^1/_4$ e $^1/_8$ utilizando, essencialmente, as representações ativas (ou seja, as tiras). Os alunos conseguem, autonomamente, comparar as três frações apresentadas, o que os ajuda bastante na compreensão dos números racionais, especialmente no que respeita ao significado parte-todo e à compreensão da magnitude de um número racional. Exprimem essas relações em linguagem verbal e mostram dificuldades em representá-las utilizando a linguagem matemática. Esta foi a primeira aula de ensino formal deste tópico, pelo que, é natural que os alunos ainda tenham bastantes dificuldades com a linguagem própria das frações.

A questão 3 tem como objetivo desenvolver nos alunos a compreensão de número racional como razão. Para facilitar a resolução e tendo em conta que esta é a primeira aula sobre o tema, a professora estabelece um número “simpático” para a medida da tira, 20 cm. Os alunos apoiam-se nas relações entre as partes da tira, discutidas na questão anterior, para descobrirem o comprimento de cada parte, que representam do seguinte modo (Figura 4):


Elementos do grupo: ; Daniela ;

TAREFA: DOBRAS E MAIS DOBRAS

3. Em cada uma das tiras, determina a razão entre cada um dos comprimentos das partes obtidas após as dobragens e o comprimento da tira. Regista as tuas conclusões.

A figura A ao todo mede 20 cm.
Se dividirmos 20:2 = 10 e 10 + 10 = 20
A figura B ao todo mede 20 cm.
Se dividirmos 20:4 = 5 e 5 × 4 = 20
A figura C ao todo mede 20 cm
Se dividirmos 2:8 = 2,5 e 2,5 × 8 = 20

Figura 4 – Resolução da questão 3 por Carolina, Diana e Filipe.

Apesar de conseguirem estabelecer uma relação entre o comprimento total das tiras e o comprimento das partes, os alunos não usam a representação simbólica de razão em fração, mas já a exprimem em linguagem verbal:

> **Professora**: Então vamos ver que a que conclusões chegaram. Que relação encontraram entre o comprimento da tira e o comprimento da primeira parte?
>
> **Luís**: A metade mede 10 cm. Ou seja, se a tira mede 20, a metade é 10. Que é 20 a dividir por 2.
>
> **Professora**: Então qual é a relação entre o comprimento da parte e do todo?
>
> **Vários alunos**: É a metade.

Note-se o estilo de questionamento da professora na discussão coletiva, pontuado por questões abertas (“vens explicar…”, “concordam…”, “o que é que está mal?”, “porquê?”, “então e o decimal, como é que fica?”). Note-se, também, que a cultura da sala de aula já integrou a noção que os alunos podem contribuir com diferentes respostas e discordar e argumentar uns com os outros.

Síntese. Na síntese final a professora coloca diversas questões para retomar os aspectos onde os alunos mostram mais dificuldade. Assim, a propósito da questão 1, é recordado o sistema de numeração decimal, para que os alunos compreendam porque é que 0,25:2 = 0,125. Conclui-se que o traço de fração corresponde à operação divisão e, portanto, neste caso, $^1/_8 = 1 : 8 = 0{,}125$. A partir do trabalho dos alunos, a professora pede-lhes que enunciem uma “regra” para converter um número decimal numa percentagem. Os alunos, analisando os exemplos discutidos, concluem que “andam” sempre duas “casas” para a direita e, apesar de não conseguirem verbalizar a multiplicação por 100, acabam por descobrir, por si mesmos, a “regra” pedida.

Retomando a questão 2, são analisadas algumas frações equivalentes, concluindo-se que uma dada parte pode ser representada por uma infinidade de frações. Discute-se também a representação da unidade concluindo-se que, quando o numerador é igual ao denominador, estamos a considerar a unidade e, podemos representar, por exemplo, $^4/_4 = 1$. Uma aluna verifica ainda que, $^4/_8 = {}^1/_2$ porque 4 é metade de 8, concluindo-se que existem várias frações que representam o mesmo que $^1/_2$, sendo em todas elas o numerador metade do denominador. Embora não se tenha falado expressamente em equivalência de frações, abriu-se assim caminho a esta noção. São também explicados os termos das frações (numerador, denominador) e a sua relação, especialmente, no significado parte-todo. Para confirmar a compreensão dos alunos, a professora pede-lhes ainda que ordenem as três frações obtidas, e estes indicam com facilidade ordenação correta ($^1/_2 > {}^1/_4 > {}^1/_8$) e concluem que "à medida que vamos dobrando a tira, as partes vão ficando cada vez mais pequenas". A questão 3, que tinha servido essencialmente para a preparação da abordagem do conceito de razão, seria retomada noutra altura.

Desenvolvendo o pensamento algébrico

O estudo. A segunda situação decorre de um estudo que visa compreender como uma unidade de ensino para o 7.º ano, baseada no estudo de padrões e regularidades, nomeadamente em sequências, contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico e, em particular, para a compreensão das variáveis e equações (BRANCO, 2008). A abordagem visa o desenvolvimento do pensamento algébrico promovendo a generalização e a sua representação (BLANTON & KAPUT, 2005) no trabalho com sequências pictóricas e numéricas e uma interpretação estrutural das equações (KIERAN, 1992). Tal como no caso anterior, esta experiência de ensino foi conduzida pela terceira autora deste artigo no contexto da sua prática, usando observação participante. A recolha de dados tem por base a gravação áudio, um diário de bordo, os documentos produzidos pelos alunos da turma nas tarefas propostas e as entrevistas realizadas a dois alunos antes e depois da leccionação da unidade.

A tarefa. Elaborada a partir de Herbert e Brown (1999), a tarefa tem por base um problema clássico, já conhecido na Idade Média.

Atravessando o rio

1. Seis adultos e duas crianças pretendem atravessar um rio. O pequeno barco que está disponível apenas pode levar um adulto ou uma ou duas crianças (ou seja, existem três possibilidades: 1 adulto no barco; 2 crianças no barco; 1 criança no barco). Qualquer pessoa pode conduzir o barco. Quantas vezes o barco tem de atravessar o rio até todos estarem na outra margem?

2. O que acontece se quiserem atravessar o rio:
   - 8 adultos e 2 crianças;
   - 15 adultos e 2 crianças;
   - 3 adultos e 2 crianças.

3. Podem descrever, por palavras, como resolvem o problema se o grupo de pessoas for constituído por duas crianças e um número qualquer de adultos? Verifiquem se a vossa regra funciona para 100 adultos?

4. Escrevam uma fórmula para um número de adultos A e duas crianças.

5. Um grupo de adultos e duas crianças fizeram 27 viagens para atravessar o rio. Quantos adultos faziam parte deste grupo?

6. O que acontece se mudar o número de crianças? Verifiquem o que muda na fórmula que escreveram anteriormente, nos seguintes exemplos:
   - 6 adultos e 3 crianças;
   - 6 adultos e 4 crianças;
   - 8 adultos e 4 crianças;
   - A adultos e 7 crianças.

Trata-se de uma situação, cuja exploração permite identificar regularidades que podem ser expressas em diferentes representações (o que é necessário para que um adulto passe para a outra margem? E uma criança?). Por sua vez, a identificação destas regularidades permite a generalização da situação e a sua representação algébrica. Assim, a situação ajuda a promover a compreensão da linguagem algébrica utilizada e a interpretação da representação da generalização contribui para uma correta interpretação dos resultados obtidos. Os seus objetivos são promover nos alunos a capacidade de (i) encontrar regularidades e generalizá-las, (ii) utilizar e interpretar a linguagem algébrica, e (iii) analisar a influência da variação das condições nas soluções encontradas. Note-se que a tarefa está formulada em linguagem natural, mas a sua resolução depende de se encontrar uma representação adequada e da interpretação dos resultados matemáticos obtidos.

A consideração de um número fixo de crianças e um número variável de adultos dá origem à exploração de uma sequência (1 adulto, 2 adultos, etc.). Essa exploração torna-se mais complexa com a consideração de um número variável de crianças e um número variável de adultos dá origem a uma família de sequências, aprofundando a investigação feita pelos alunos. A tarefa foi proposta numa turma de 7.º ano de escolaridade, depois de realizadas duas tarefas com sequências pictóricas que proporcionaram o início da utilização da linguagem algébrica. Também neste caso, a realização da tarefa envolve momentos da aula com dinâmicas distintas. Proporciona momentos de apresentação/negociação, de trabalho autónomo dos alunos (aqui aos pares, com discussão entre os alunos e acompanhado pela professora) e de discussão colectiva. A cada momento de trabalho autónomo segue-se uma discussão colectiva, ciclo que se repete várias vezes. A realização da tarefa encerra com uma síntese final.

Apresentação da tarefa. A professora organiza os alunos em pares para discutirem entre si a situação e formularem estratégias de resolução. Na apresentação da tarefa, salienta as condições dadas para as viagens. Os alunos começam a trabalhar, simulando as primeiras viagens e discutindo várias possibilidades. Contudo, a situação revela-se confusa e os alunos colocam questões à professora para esclarecer as condições dadas e para discutirem as suas primeiras hipóteses. Gera-se um ambiente de alguma agitação.

Neste ponto a professora considera que se impõe um momento de diálogo coletivo que ajude os alunos a compreender e interiorizar as condições da situação proposta. Solicita então a atenção de toda a turma e, seguindo a sugestão de um par de alunos, pergunta o que acontece se na primeira viagem o barco for conduzido por um adulto. Os alunos verificam a necessidade de a primeira viagem ser realizada por duas crianças de modo a permitir que o barco regresse à margem de partida, sendo novamente conduzido por uma criança. A professora questiona quem pode seguir no barco nas viagens seguintes e remete os alunos de novo para o trabalho autónomo. Antes disso, alerta toda a turma que se pretende determinar o número mínimo de viagens, devendo evitar-se a realização de viagens por adultos que têm de regressar com o barco.

Trabalho dos alunos. Os alunos voltam a experimentar várias possibilidades e verificam que algumas delas criam situações em que o adulto tem de regressar com o barco sem que passe efetivamente mais um adulto para a outra margem. Alguns pares tentam, ainda, colocar um adulto e as duas crianças numa viagem ou um adulto e uma criança. O diálogo seguinte, entre Diana e a professora, mostra como nesta fase os alunos ainda estão a tentar compreender as condições dadas:

> **Diana**: Se forem as duas crianças para lá. Depois outra vem.
> **Professora**: Sim. Vão duas para lá e depois fica lá uma e a outra vem.
> **Diana**: Mas um adulto não pode ir com uma criança?
> **Professora**: Não. Um adulto tem de ir sozinho, não é?
> **Diana**: Já percebi. Vão duas crianças para lá, depois uma vem. Depois ela fica lá e vem um adulto.
> **Professora**: Certo.
> **Diana**: Depois a outra criança vem e vai outro adulto.
> **Professora**: Sim. E vão ficar aqui dois adultos. Quem é que vai levar o barco para lá?
> **Diana**: Pois!?

Diana e Mariana simulam as viagens e, tal como outros pares, acabam por indicar corretamente as quatro primeiras viagens. Contudo, sugerem que a quinta viagem seja feita por um adulto, ficando novamente com a situação em que o adulto terá de regressar com o barco. Durante algum tempo, os alunos continuam a sua exploração de modo autónomo, sendo este trabalho acompanhado pela professora que se desloca junto deles. Todos os pares verificam que a quinta viagem deve ser realizada, novamente, pelas duas crianças. Na sequência, vão pensando nas viagens necessárias até todos os membros do grupo estarem na outra margem. Os vários pares de alunos usam diferentes representações. Alguns descrevem em linguagem natural todas as viagens, outros produzem esquemas ou associam representações icónicas e simbólicas (Figuras 5 e 6):

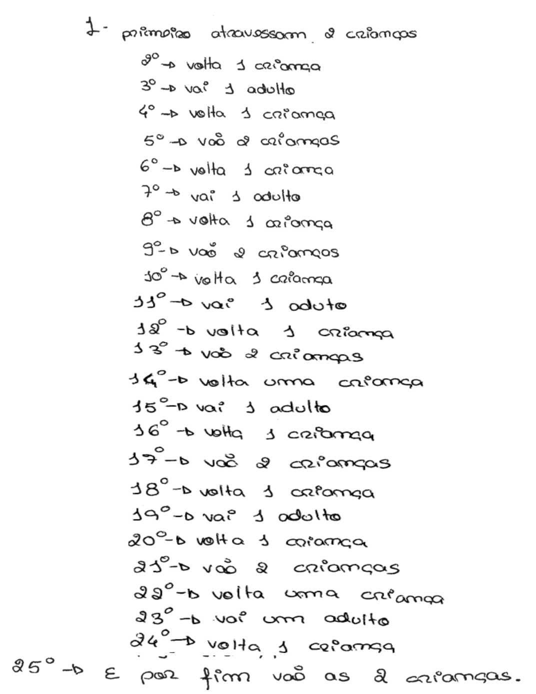


Figura 5 – Representação de Beatriz e Andreia na Questão 1

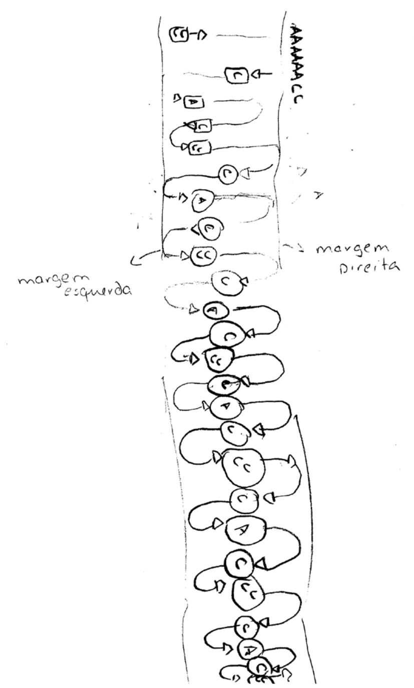


Figura 6 – Representação de Joana e Catarina na Questão 1

Diana e Mariana identificam a regularidade mas não indicam o número total de viagens e não referem o que acontece no final. Estas alunas não concretizam as vinte e cinco viagens e apenas apresentas as quatro viagens que se repetem para cada adulto passar de margem (Figura 7):

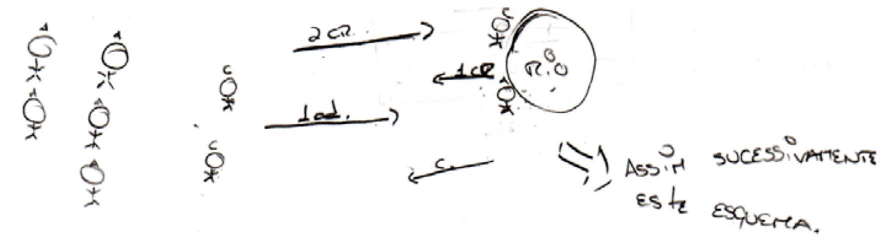


Figura 7 – Representação de Diana e Mariana na Questão 1

Discutindo com a professora, Diana e Mariana concluem que este conjunto de quatro viagens se repete seis vezes, ficando na primeira margem as duas crianças. Verificam, então, que para além das vinte e quatro viagens, tem de ser feita uma última viagem que transporta as duas crianças para junto dos adultos, realizando-se um total de vinte e cinco viagens. É o que escrevem em linguagem simbólica (Figura 8):

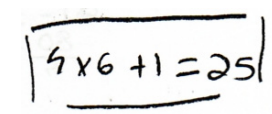


Figura 8 – Representação do número de viagens por Diana e Mariana na Questão 1

À medida que os pares de alunos terminam a resolução desta primeira questão, a professora percorre os vários grupos e verifica que nem todos identificam a regularidade que existe nas viagens a fazer para que um adulto mude de margem. A professora solicita a alguns deles que apresentem as suas conclusões e, quando necessário, sugere que procurem uma regularidade na sequência de viagens, o que gera bastante discussão.

Os alunos passam à questão 2, em que se mantém o número de crianças e varia o número de adultos. Tendo encontrado a regularidade na questão anterior, os alunos respondem facilmente às três alíneas. Na situação de oito adultos e duas crianças, por exemplo, alguns alunos representam o número total de viagens pela expressão 8 x 4 + 1 = 33 revelando ter compreendido a regularidade e conseguir generalizá-la, aplicando-a a novas situações. No entanto, outros alunos, como Joana e Catarina dão uma resposta num misto de linguagem simbólica e linguagem natural (Figura 9):

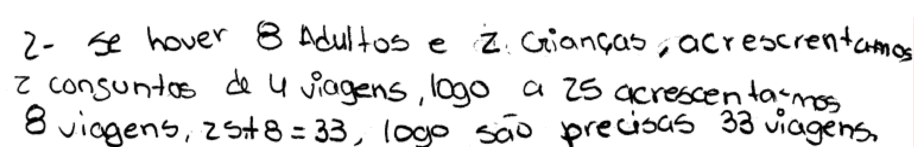


Figura 9 – Resposta de Joana e Catarina na Questão 2

Estas alunas partem da situação anterior, em que havia seis adultos e duas crianças, e indicam que para se transportar mais dois adultos é preciso realizar mais quatro viagens por cada um.

Discussão. Quando a maioria dos alunos termina a questão 2, a professora promove um momento de discussão de modo a aferir a compreensão dos alunos da situação e confrontar as suas diferentes representações. Verifica-se que algumas representações possibilitam rapidamente a identificação da regularidade, como é o caso das indicadas nas Figuras 5, 6 e 7. Contudo, o mesmo não acontece com a representação em linguagem natural usada por Susana e Cila (Figura 10), que não completam a sua resposta:

1. vão duas crianças no barco até á margem do outro lado depois, uma criança volta e fica lá e vem um adulto. A criança ficou na outra margem traz o barco até á outra margem e leva a outra criança, volta uma criança e vai buscar outro adulto (a criança fica lá), o adulto vai para a outra margem e a outra criança volta para buscar a outra criança, vão até á outra margem e uma delas fica lá, a outra volta para buscar um adulto, e fica lá a criança, volta a outra criança para buscar a outra, a criança vai por a outra á margem e vai buscar um adulto, o adulto fica lá, a criança que lá vai buscar a outra criança, volta para a margem e deixa uma criança, vai buscar um adulto, vai

Figura 10 – Resposta de Susana e Cila na Questão 1

A apresentação de estratégias é importante para os alunos compreenderem as situações segundo diferentes perspetivas, esclarecerem significados e perceberem a importância do uso de representações eficientes. Esta apresentação cria também as condições para que os alunos possam fazer uma posterior generalização.

No caso dos oito adultos e duas crianças, Susana revela um raciocínio já bastante abstrato, que partilha com os colegas no quadro, escrevendo 8 x 4 + 1 = 33 e esclarecendo o seu significado:

> Fazemos oito adultos vezes o número de viagens que eles têm de fazer para levarem um adulto para a margem e fazemos mais um que é o número que as crianças fazem de volta.

Trabalho dos alunos e nova discussão. Com base na discussão anterior e nas conclusões a que chegam, os alunos dão continuidade ao trabalho autónomo nas questões 3, 4 e 5, que resolvem rapidamente. Assim, a questão 3 solicita que descrevam o modo como procedem qualquer que seja o número de adultos. A maioria dos alunos dá a sua resposta em

linguagem natural mas alguns associam a linguagem natural à linguagem simbólica, como Joana e Catarina (Figura 11):

É o nº de Adultos x 4+1.

Figura 11 – Resposta de Joana e Catarina na Questão 3

No momento da discussão, Susana apresenta a sua regra para determinar o número total de viagens. Usando as suas próprias palavras indica uma vez mais o significado que atribui à expressão:

> **Professora**: Susana, diz lá.
>
> **Susana**: Então, é assim: Vai ser o número de adultos vezes as quatro viagens mais uma viagem das crianças.
>
> **Professora**: Está certo.
>
> **Susana**: Nos cem adultos fica cem vezes quatro mais um que é igual a quatrocentos e um.

Na questão 4, quando os alunos elaboram a expressão solicitada, atribuem um significado muito concreto aos seus termos. Na discussão os alunos apresentam várias expressões algébricas, como $A\times 4+1$, $4\times A+1$ e $4A+1$, o que permite discutir a utilização da propriedade comutativa na multiplicação e a omissão do sinal "×". Discute-se, ainda, o significado dos termos e coeficientes. O coeficiente 4 representa a sequência de quatro viagens que se repete, o termo 4*A* indica o número de viagens necessário para que *A* adultos mudem de margem e o termo 1 representa a última viagem, realizada pelas duas crianças. Na sequência desta discussão, a professora pergunta aos alunos como podem calcular o número de viagens para diferentes números de adultos, utilizando a expressão algébrica, retomando o significado dos termos e coeficientes:

> **Professora**: Se *A* for igual a vinte e seis o que é que significa?
>
> **Joana**: Que há vinte e seis adultos.
>
> **Professora**: Se *A* é igual a vinte e seis, digo que há vinte e seis adultos. Como é que devo fazer?
>
> **Susana**: É o vinte e seis vezes quatro mais um.

Na questão 5 é dado um número de viagens e os alunos devem determinar o número de adultos que integram o grupo, sem que haja repetição de viagens por parte dos adultos. Os alunos sugerem a realização das operações inversas, contudo nem todos têm claro qual a operação a realizar em primeiro lugar. Estes alunos usam uma abordagem aritmética, o que é natural dado que ainda não iniciaram o estudo de equações. Alguns começam por dividir vinte e sete por quatro mas verificam que assim não faz sentido retirar em seguida a última viagem. No momento da discussão com toda a turma, Joana indica rapidamente a sua resposta:

> **Joana**: Não dá certo.
> **Professora**: Não dá?
> **Joana**: Não dá certo. A 27 retira-se 1 e depois divide-se por 4.
> **Professora**: E o que é que acontece?
> **Joana**: Dá 6,5.
> **Professora**: O que é que significa?
> **Paulo**: Não é número certo [referindo-se a número natural].

Esta questão possibilita a discussão da adequação do resultado e da resposta a dar tendo em conta o contexto, promovendo a interpretação do resultado matemático obtido.

A questão 6 introduz uma nova variante, o número de crianças, sendo necessário estudar a influência desta condição na regra encontrada anteriormente. Os alunos são chamados a explorar a influência da variação do número de crianças na necessidade de viagens. Após a análise desta nova situação, verificam que isso não altera o conjunto de quatro viagens que é necessário fazer para que um adulto mude de margem. Com duas crianças, além do conjunto de quatro viagens por cada adulto, realizam uma viagem no final para transportar uma criança. No caso de terem três crianças identificam que apenas o número de viagens no final se altera, verificando que é necessário realizar mais duas viagens para que a terceira criança também mude de margem. Tendo mais duas, ou seja, quatro crianças no total, fazem duas viagens por cada criança, ou seja, duas vezes duas viagens. Respondem a cada uma das situações com base nos esquemas particulares, sem estabelecerem uma generalização. A professora promove uma discussão coletiva desta última questão pois alguns alunos manifestam dificuldade em compreender.

> **Professora**: Quando tenho duas crianças é isto aqui [$8\times 4+1$]. Faltam-me quantas crianças?
> **Batista**: Duas.
> **Professora**: E quantas viagens tenho de fazer para as ir buscar?
> **Susana**: Mais quatro.
> **Professora**: Cada vez que vou buscar mais uma criança são duas viagens [conclusão das alíneas anteriores]. Se forem oito adultos e quatro crianças… Diz, Filipe.
> **Xico**: Oito vezes quatro mais um mais quatro.
> **Professora**: E agora, se tiver *A* adultos e 7 crianças? [Ninguém responde] Para duas crianças a expressão é esta [4*A* +1]. Mas agora não tenho duas, tenho mais quantas?
> **Andreia**: Cinco.
> Professora – Vou ter mais cinco. Quantas viagens é que tenho de fazer por cada uma delas?
> **Diana**: Duas.
> **Andreia**: Cinco vezes dois.
> **Professora**: Então, fica quanto? Como é que simplifico a expressão?
> **Susana**: Quatro *A* mais…
> **Diana**: Dois vezes cinco dá dez.
> **Batista**: Onze.

Na discussão coletiva desta última questão os alunos analisam a influência da alteração do número de crianças na expressão inicialmente encontrada. Verificam que a sequência de quatro viagens necessária para colocar um adulto na outra margem se mantém e que, para além da viagem realizada no final pelas duas crianças, se fazem duas viagens por cada criança a mais. Deste modo, identificam uma nova regularidade que respeita ao número de crianças (Figura 12):

6x 4 + 1+2 = 27 viagens.
6x 4 + 1+2 +2
8x 4+1+ 4
A x 4 + 1+ 2.x 5 = 4A + 11
Conclusão: tem que se fazer 2 viagems para ir buscar 1 só criança

Figura 12 – Resposta de Joana e Catarina após a discussão na Questão 6

Síntese. No final da aula é retomada a regularidade identificada na primeira questão e revisto o significado da expressão algébrica que generaliza a situação qualquer que seja o número de adultos, mantendo duas crianças no grupo. É analisada a impossibilidade de simplificação da expressão $4A+1$. Os alunos verificam que esta expressão não é equivalente a $5A$, tanto com base no contexto como usando a propriedade distributiva. A interpretação dos seus termos de acordo com o contexto é, assim, recordada pelos alunos e identifica-se a sua importância para uma adequada análise dos resultados obtidos nas duas últimas questões. Na questão 5 verifica-se que um dado número corresponde ao número de viagens realizado por um grupo de adultos e duas crianças se depois de subtrair 1 o número obtido for divisível por 4. Na última questão destaca-se o facto de se ter utilizado a resposta à questão 1 para se compreender o que acontece quando se aumenta o número de crianças, bem como o uso da expressão $4A+1$ para determinar o número de viagens para *A* adultos e diferentes números de crianças.

Discussão e conclusão

As aulas acima indicadas têm por base tarefas de exploração e investigação destinadas a promover aprendizagens importantes. Na resolução da tarefa “Dobras e mais dobras” os alunos utilizam estratégias de visualização apoiadas nas representações ativas e pictóricas. Usam com facilidade a representação decimal, embora tenham dela uma compreensão ainda limitada. Usam também representações verbais mas mostram não conhecer a linguagem específica das frações.Com a realização desta tarefa, os alunos desenvolvem a sua capacidade de usar os diversos tipos de representação dos números racionais, em especial as frações e a linguagem verbal que lhes estão associadas e recordam a representação em percentagem. Utilizam também como estratégia o referencial de metade (POST, BEHR & LESH, 1986) para relacionar as diferentes partes de uma tira, mostrando perceber o padrão em causa e usam esse conhecimento para chegar às representações seguintes sem partir sempre da unidade. Além disso, concluem que à medida que aumenta o número de partes, estas ficam cada vez menores. Deste modo, estabelecem diversas relações multiplicativas entre $^1/_2$, $^1/_4$ e $^1/_8$ que os ajudam no desenvolvimento do sentido de número racional.

A realização desta tarefa permite atingir a generalidade dos objetivos previstos pela professora. Assim, os alunos conseguem reconhecer várias representações de número racional e enunciam por si próprios regras para converter numerais decimais em percentagem, apesar de por vezes não as aplicarem nas questões seguintes. Comparam diversos números racionais nas representações ativa e pictórica e estabelecem relações multiplicativas simples (dobro, metade) e um pouco mais complexas (quádruplo, um quarto). Mostram algum sentido de frações equivalentes e conseguem comparar as três frações apresentadas, embora, como seria de esperar, não cheguem a representar a razão como fração. No entanto, na realização da tarefa, os alunos revelam duas dificuldades significativas. A primeira, de natureza geral, tem a ver com a compreensão do enunciado das questões quando este envolve termos cujo significado não lhes é familiar. A segunda, mais específica, tem a ver com a insegurança observada no trabalho com numerais decimais, já aprendidos no 1.º ciclo. Estas dificuldades, registadas pela professora, foram objeto de atenção nas aulas subsequentes.

Os resultados globais desta experiência de ensino (QUARESMA, 2010) mostram que os alunos melhoram a sua compreensão da representação fraccionária e da percentagem e até da representação decimal. Além disso, desenvolvem a sua compreensão da comparação e ordenação dos números racionais, utilizando, sobretudo, a representação decimal. A hipótese de ensino-aprendizagem é sustentada pela compreensão que os alunos revelam dos números racionais, mostrando perceber que um número racional pode ser representado de diversas formas e mostrando flexibilidade na escolha da representação mais adequada e com a qual conseguem resolver as tarefas propostas.

A realização da tarefa "Atravessando o rio" atinge também os objectivos previstos pela professora. A exploração inicial realizada pelos alunos, de modo informal, levaos a formular uma generalização e, posteriormente, estudar de modo mais formal a situação. Deste modo, constroem as suas representações da situação e o uso da letra surge de modo natural, com o significado de número generalizado. A apresentação das descobertas dos alunos, por eles próprios, usando as suas palavras e os seus esquemas e símbolos, permite uma melhor compreensão da situação e a atribuição de significado à generalização que expressam em linguagem algébrica. Os alunos desenvolvem também a sua capacidade de interpretação da linguagem algébrica a partir da sua análise de diferentes expressões, nomeadamente no que respeita à utilização de propriedades das operações. Finalmente, analisam a influência da variação do número de adultos e do número de crianças no número de travessias necessária. Generalizam esta situação usando a linguagem natural e símbolos matemáticos, identificando a necessidade de realizar duas viagens por cada criança que acresce a um grupo de A adultos e duas crianças.

Os momentos de trabalho autónomo em pares possibilitam aos alunos progredir na interpretação da situação e na procura de respostas e discutir de modo detalhado várias possibilidades. As discussões coletivas, numa fase inicial ajudam a compreensão da situação, numa fase intermédia permitem a partilha de representações e a identificação de regularidades de modo a que todos consigam progredir nas questões seguintes e numa fase final, favorecem a sistematização de conclusões e dos resultados obtidos, bem como a análise de situações mais complexas.

Os resultados globais desta experiência de ensino (BRANCO, 2008) mostram que os alunos desenvolveram alguns aspetos do pensamento algébrico, nomeadamente a capacidade de generalizar e de usar a linguagem algébrica para expressar as suas generalizações, sustentando também a hipótese de ensino-aprendizagem. No entanto, a evolução dos alunos não é igualmente significativa em todos os temas abordados. Na resolução de problemas envolvendo equações, privilegiam estratégias aritméticas e manifestam alguma dificuldade em usar a linguagem algébrica para representaras situações propostas. Revelam evolução na compreensão da linguagem algébrica relativa aos diferentes significados dos símbolos em diversos contextos e ao significado e à manipulação de expressões mas, em diversos aspetos específicos essa compreensão é ainda frágil, sugerindo que terão ainda um longo caminho a percorrer com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Deve notar-se que, para além da natureza exploratória e investigativa das tarefas, estes resultados decorrem também da estrutura da aula e do estilo de comunicação promovido pelas professoras. Ambas as aulas decorreram em ciclos compostos de (i) apresentação e interpretação da tarefa, (ii) trabalho autónomo dos alunos em pares ou grupos, e (iii) discussão coletiva. O trabalho foi concluído com uma síntese das ideias principais. O estilo de comunicação promovidos pelas professoras procurou valorizar as contribuições dos alunos, valorizando a argumentação e contra-argumentação entre eles. Trata-se de um tipo de aula que tem vindo a ser cada vez mais utilizado em Portugal, no âmbito do novo programa de Matemática do ensino básico, com resultados muito positivos em termos de aprendizagem (PONTE, NUNES & QUARESMA, em publicação).

As situações que apresentamos mostram que as tarefas de exploração e investigação podem constituir a base do trabalho quotidiano na sala de aula, tendo em vista a aprendizagem dos conceitos, representações e procedimentos que constituem o núcleo central do currículo de Matemática, ao mesmo tempo que constituem um terreno favorável para o desenvolvimento de capacidades transversais como o raciocínio e a comunicação matemática. Ao contrário dos problemas que, como vimos, tendem a assumir um papel marginal nas práticas dos professores, verificamos que a realização do ensino tendo por base explorações e investigações pode ser naturalmente integrada no ensinoaprendizagem dos mais diversos tópicos matemáticos. O desenvolvimento das condições para que isso aconteça em cada contexto educativo coloca, certamente, interessantes desafios aos professores e aos educadores matemáticos que nele atuam.

Referências

BEHR, M.; POST, T. Teaching rational number and decimal concepts. In: POST, T. **Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods** 2.ed. Boston, MA: Allyn and Bacon, 1992. p.201-248.

BLANTON, M.; KATUT, J. Characterising a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA, v.36, n.5, p.412-446, nov. 2005.

BRANCO, N. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico.** 2008. 251p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008. Disponível em: < http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1197/1/17737_ULFC086729_TM.pdf>. Acesso em 31 julho 2011.

HERBERT, K.; BROWN, R. Patterns as tools for algebraic reasoning. In: MOSES, B. **Algebraic thinking, grades K-12**. Reston, VA: NCTM, 1999. p.123-128.

KIERAN, C. The learning and teaching of algebra. In: GROUWS D. A. **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York, NY: Macmillan, 1992. p.390-419.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Organização curricular e programas (3.º ciclo do ensino básico)**. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda, 1991.

MENEZES, L. et al. **Números racionais não negativos: Tarefas para 5.º ano (Materiais de apoio ao professor)**. Lisboa: DGIDC, 2008. Disponível em: <http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/015_Sequencia_Racionais_n% C3%A3o_negativos_NPMEB_2c5_(Julho2009).pdf>. Acesso em: 31 julho 2011.

NCTM. **An agenda for action**. Reston, VA: NCTM, 1980.

PAPERT, S. Ensinar as crianças a serem matemáticos vs ensinar matemática. In: PONTE, J. P. **O computador na educação matemática**. Lisboa: APM, 1991. p.29-44. (Publicação original 1971)

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1975.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI. **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005, p.11-34.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P.; CANAVARRO, A. P. (1994). A resolução de problemas nas concepções e práticas dos professores. In: FERNANDES, D.; BORRALHO, A.; AMARO G. **Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1994. p.197-211.

PONTE, J. P.; NUNES, C. C.; QUARESMA, M. Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática: elementos fundamentais para a aprendizagem. In: SILVA, A. C.; CARVALHO, M.; RÊGO, R. G. **Ensinar Matemática: Formação, investigação e práticas docentes na educação básica**. Cuiabá: UFMT, em publicação.

POST, T.; BEHR, M.; LESH, R. Research-based observations about children’s learning of rational number concepts. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v.8, n.1, p.39-48, Win 1986.

QUARESMA, M. **Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino**. 2010. 259 p.. Dissertação (Mestrado em Educação) - Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/2451>. Acesso em: 31 julho 2011.

How we teach University Mathematics: Teachers talk about what they do

Janette Matthews and Barbara Jaworski
Loughborough University, UK

Abstract

The *How we Teach* seminar series has included seminars presented by both mathematicians and mathematics educators focusing on their teaching of mathematics to mathematics or engineering students. Video-recordings of 10 of the seminars have been analysed to discern a teaching discourse and characterise a community of practice in teaching. Further, we suggest that opportunities to talk about how we teach not only reveal the discourse, but make us aware of issues in teaching; they alert us to what we know and importantly what we do not know. Mathematicians and mathematics educators together address issues related to the learning of our students and how best effective learning can be achieved. Questioning of practices and processes in teaching, leads to possibilities for new forms of practice and development of an inquiry community in teaching.Palavras chave: etnomatemática, formação de professores, conhecimento primeiro, contexto não escolar, diversidade cultural.

Keywords: University Mathematics Teaching; Discourse; Community, Practice, Inquiry.

Resumo

A série de seminários *Como nos Ensinamos* incluiu seminários apresentados por matemáticos e educadores matemáticos enfocados em seus ensinos de Matemática para alunos de Matemática ou alunos de Engenharia. Dez minutos de gravação em vídeo dos seminários foram analisados para discutir um discurso de ensino e caracterizar uma comunidade de prática em ensino. Além deste, nós sugerimos que oportunidades de falar sobre como nós ensinamos não apenas revela o discurso, mas nos faz ficar cientes de questões sobre ensino; eles nos alertam para o que sabemos e mais importante o que nós não sabemos. Matemáticos e educadores matemáticos juntos direcionam questões relacionadas à aprendizagem de nossos alunos e como melhor aprendizagem efetiva pode ser alcançada. Questionando práticas e processos de ensino, leva a possibilidades de novas formas de prática e desenvolvimento de uma comunidade de indagação em ensino.

Palavras-chave: Ensino de Matemática Superior; Discurso; Comunidade; Prática; Indagação.

Introduction

This paper reports further analysis of data from the "How we Teach' seminar series in the School of Mathematics in a UK university[1]. Initial findings were described in Jaworski & Matthews, 2011. Starting in 2007, seminars have been presented by university mathematics lecturers to an audience of mathematicians or mathematics educators. All seminar participants teach mathematics to mathematics or engineering students. The aim of the seminars was to develop a 'community of inquiry' and a 'teaching discourse' within the School. Over twenty seminars have been held to date. Most were video recorded and ten have been analysed. Analysis aimed to examine how university teachers of mathematics talk about their teaching. We illustrate the issues they identify, the actions they say they take and highlight areas of uncertainty.

Teaching mathematics at university

A community of inquiry derives from a *community of practice* (Wenger, 1998). The School of Mathematics (SoM), within the university can be seen as an established community of practice (CoP – the practice' being the teaching of university mathematics to mathematicians and engineers) with Wenger's three features of *mutual engagement, joint enterprise* and *shared repertoire*. Following Wenger further, members of the CoP exhibit *engagement* with the activity of teaching mathematics, use *imagination* in interpreting their own roles as teachers, and *align* with the norms and expectations of the institution. The introduction of *inquiry* in which members question processes and practices while aligning with norms and expectations leads to a process of *critical alignment* (Jaworski 2006). The growth of such critical questioning within the established community leads to development of a *community of inquiry* in which participants engage in reflection on their own and others' practice.

According to Wells (1999), an essential feature of a community of inquiry lies in the nature of its discourse. Seeing the SoM as an established community in Wenger's terms, with the seminars opening up a dialogue relating to mathematics teaching, allows us to reveal a discourse on teaching. Discussion within the seminars and overt questioning of ideas about practice then allows a critical element to enter, in which we inquire jointly into the ways we talk about, and therefore conceptualise teaching. In revealing a teaching discourse we make elements of our *joint enterprise* and *shared repertoire* overt – learning from how we teach, learning from talking about how we teach. Discussion and questioning encourage a critical attitude towards what is expressed, which over time, promotes an inquiry community in which inquiry becomes *a way of being* for participants (Jaworski, 2006).

Methodology

We used a qualitative approach to analysis. Ten seminars were selected as being most representative of teaching university mathematics. A balance was sought between mathematics educators (6) and mathematicians (4). Discussion among seminar participants during and after presentations was included. Two researchers viewed a video recording of one seminar together and discussed their separate interpretations. They then, independently, viewed a video recording of a second seminar, identified key episodes and related content. Through discussion, a style of analysis for the other seminars was identified. This involved one researcher viewing the video recordings multiple times. A data reduction with timeline was produced, in which significant ideas were highlighted and illustrative quotations extracted, and a synopsis of the seminar was produced highlighting themes and issues. Through discussion with both researchers, interpretations were justified and data began to be categorised. Analysis was reviewed periodically to discern emerging categories.

Our paper, Jaworski & Matthews, 2011, ended with a tentative categorisation emerging from analysis of the seminars and the discussion among participants. The further analysis described here results from revisiting the data reductions and in some cases the video recordings in the light of categories that emerged in earlier analysis. Evidence was sought to validate these categories and provide illustrative examples of how university mathematics teachers talk about their teaching. The three main areas of categories are: *the issues teachers were trying to address*; *what they did, how they teach and why*; and *what they do not know that would be useful to know.* We present here findings from our further analysis on these categories.

What the issues are that we are trying to address

Mathematics teachers try to address three main issues (a, b c):

a. Conceptual understanding of mathematics

Lecturers seek to promote the learning of mathematics making a distinction between learning techniques and understanding the mathematical concepts. Most place emphasis on conceptual understanding. However, it is thought that students would rather learn to tackle examples and exercises than the more difficult skill of gaining conceptual understanding. For example,

> ..[it is] important to discuss the conceptual background of the material because examples are much easier for most students..... If I do only that [examples], students miss the most important part." [M4][2]

There is an appreciation that students do not necessarily gain conceptual understanding immediately. It requires an investment in time and work on the part of the student and the use of all the learning opportunities made available to students – lectures, tutorials, notes, text books, examples and problem sheets. For example,

> ".. you give them the materials, make it tolerably understandable but they don't understand a subject until they have done the tutorial sheets, worked their way through it, gone back to lecture notes and then they understand" [M2]

b. Student engagement in learning mathematics

Mathematics lecturers feel it is important that students engage with learning of mathematics throughout a module. Teaching in context, making the topics relevant, particularly for engineering students was seen as a way to achieve this as was the use of a variety of resources such as video clips, animations, tutorial sheets and appropriate examples. For example,

> "I think it is vital that we teach maths [in context] where we can to the best of our ability. It gives students a much better experience, …shows them that we are trying to relate to where they are coming from and gets them on our side a bit more" [ME4]

> "You've got to tell them that when they get the tutorial sheet they must not expect to do it without struggling. If you give them a tutorial sheet and they can answer it without struggling they haven't learnt anything. They only learn it if they struggle at it, can't do it and then they go away and check in the notes and then they work their way through it ... . And if they can sort that out, that's how they learn. That I explain." [M2]

c. Attendance at lectures

Lecture and tutorial attendance is a concern for many participants and there was evidence from the way in which attendance was discussed that lecturers do take steps to encourage good attendance particularly with first year students. Some however do not mind if students do not attend providing they are progressing well. Others consider low attendance to be a reflection on their own actions.

> "I don't care [about attendance] if they can manage; but it is clear from exams there are students who would benefit from coming who are not" [M1]

> "I see poor attendance as a challenge. … Some say it doesn't matter if they turn up as long as they are learning. To me poor attendance is a sign I am not doing something right." [ME4]

What we do, how we do it and why?

Participants in the seminar series reflected on the above issues through talking about how they teach and why they do what they do. Lectures, notes, examples, testing, technology and student diversity were all highlighted. Given that teaching in this institution is lecture based with group tutorials, the place of the lecture was crucial.

The role of the lecture

Although full understanding may only come later, there is a desire for the lecture to be more than a vehicle for imparting information. It may be used to motivate the learning of mathematics, provide a sense of acquiring knowledge and to guide students in their learning.

> "What I would like is for students to come to lectures and be able to do something at the end that they could not do when they came in." [ME3]

> "I think they [lectures] can be fantastic for providing inspiration and structure to students about how a topic should be thought about" [ME5]

Use of examples

Apart from teaching in context and for practising techniques, some lecturers use carefully selected examples, or ask students to provide examples to generate conceptual understanding.

> "I would give these out [handout of graphs of different functions]. I would ask these students to describe in their own words some of the properties of these functions…They might talk about straight line ... some might have heard of slope. When they have given me lots of words we start to tease out things like, periodic, symmetric, one-to-one, bounded." [ME3]

> "Immediately after you have defined some new subject, give the simplest possible example that does not have some special features, for example if you want to illustrate commutativity of addition 1+2=2+1 but 0+0 is not a good example because you have the action of the identity." [M1]

The role of notes and other learning materials

Lecture notes supplement teaching in lectures and there are differing views as to the nature of notes and how lecture notes should be employed. Whilst seminar participants feel notes are important and seemed to think that it is their role to provide them or at least a framework, the quotes below illustrate the diversity. One lecturer makes all notes available electronically in advance of lectures and expects students to prepare from them. Another feels freer to lecture knowing that students have material to refer to should they have difficulties with the lecture. Others prepare skeleton notes (notes with gaps) which are filled out by students during the lecture allowing them to take ownership of their material but using the notes as a base. This approach is seen to be a method of encouraging attendance.

> "The advantage for me … I am more comfortable lecturing knowing there is this material available. If you don't like what I am doing in lectures that's fine, just read the book." [ME2]

> [Puts all lecture note on LEARN (virtual learning environment) in advance] "They will have access to the material, they will be able to read it at the very least, print it off ideally, bring it to the lecture, add their own notes on the basis of the exposition which I have given." [ME8]

Use of testing

Some participants use informal and formal class tests on a regular basis to encourage students to reflect on their understanding and to increase their engagement with the material.

> [Talking about 10 minute tests given every two weeks] "[After the test] everyone knows something they did not know a few minutes ago about their own knowledge ... about how up to date they are with what we have studied in the last few weeks and can apply it to examples". [ME5]

> "While the stragglers are coming in late ... as soon as I go in, I put up on the screen a three minute test… Any student who has bothered to come on time can do something straight away if they want to … simple questions on things that I covered in the last lecture … . The well prepared student can do that straight away. People who haven't done anything will not be able to do anything and you can see it. ... It makes them think 'I haven't been doing anything or I have been doing something'." [ME3]

Use of technology

Inevitably technology in the form of data projectors, OHPs, tablet PCs is employed to a lesser or greater extent. It is considered important to use the technology in such a way that students are able to follow a developing mathematical argument and to obtain a sense of what doing mathematics looks like.

> "[I prefer to write on a board] to emphasise the idea that mathematics is something that people <u>do</u>… that they [the students] see a person doing mathematics, writing something out line by line and going through an argument and explaining each step." [M1]

> "Students need to see the whole calculation. They need to keep looking back to where they started from, see the key points" [M2]

Some lecturers are exploiting advantages that technology offers.

> [Showing the module LEARN page] "This is my … module. What we have got in there … We have got video podcasts. We've got bits of HELM books, quizzes and some sort of questionnaire which enables me to get some sort of feedback from the students…I upload them to the server so students have got those usually several days in advance of the lecture but if I decide to revamp it in some way, sometimes the night before, but it is always available before the lecture is." [ME8]

Using electronic voting systems (EVS) in lectures has the potential to offer something that other methods do not.

> "Students like to see others getting it wrong – know they are not on their own. [They are] getting an experience they don't get by just reading at home on their own." [ME4]

Addressing different students' needs

In talking about their teaching, participants reflect on the difficulties of teaching mathematics to large groups with different prior learning experiences and skill sets. In addition to the preparation of examples with different grades of difficulty to challenge the most able, strategies adopted in lectures include working in groups to highlight the different needs of the group to the group. There is, for some, a concern that more attention is given to the less able.

> "We are always so concerned about those who fail. Our focus is always on failure rather than those who succeed." [ME2]

> "I feel I have to give something to the good students who are going to get high firsts and who may do research. Perhaps it is just a handful of students in the room but they pay tuition fees like everyone else" [M1]

What we don't know that would be useful to know?

Frequent comment was made both by presenters and in discussion about assumptions that were made concerning the way in which students learn, how they use the material that was provided and what teachers of mathematics consider important. Questions were raised about whether students are taught appropriate skills to make the most of the materials they are given and to learn mathematics effectively.

> "What do you need to know in order to be a successful student who can go to a lecture, take appropriate notes and then go away and do something with those notes that will be productive in terms of increasing your understanding?" [ME5]

> "..should we teach the students that in lots of situations that they shouldn't expect to learn during a lecture but that they should expect to do something after the lecture?" [ME3]

> "There is some mismatch though between what we do and what the students are able to get out of it which obviously looks sometimes not like it is ideal for it. ... How can we teach them to learn from our teaching?" [ME5]

How do we learn how to teach

In discussing how we teach, participants made mention of how they learned to teach and for many, their current methods of teaching are based on their own experiences of learning. Professional development courses were not considered to be particularly relevant for the teaching of mathematics.

> "Most of my style of teaching is what I picked up from observing how people taught me when I was a student." [M1]

> "Problem … is PD [Professional Development] puts on lots of courses but because they are not contextual [i.e. about mathematics], people tend not to bother with them" [M8]

These comments beg the question of what kind of professional development might be most valuable for (beginning) mathematics lecturers. The Teaching Centre at the university has incorporated the How we Teach seminars into their programme for new mathematics lecturers. Each new lecturer is required to attend two and present one seminar and produce associated pieces of written work. We need to study whether this proves to be a useful or popular option.

Discussion

We show above that teachers talk about what they do and why, and some of the issues they are addressing. This discourse is largely about the nature of teaching and the ways in which it is conceptualised by the teachers. In some cases, teachers' reasons for what they do seem to be based on professional experience or personal viewpoints (the latter often based on the teaching experienced by the lecturer as a student, a common finding in teaching at school level). In other cases reasons are based on theoretical principles and/or on the professional literature. For example, the *use of notes with gaps* has been documented by Burn and Wood, 1995. Perspectives on *use of examples* have been informed by research (e.g. Alcock and Weber, 2010). There is considerable accord in teachers' efforts to make the best possible provision for students in terms of the teachers' teaching approach and resources used, albeit with differences in preferred approaches. Thus, through our analysis we characterise the discourse on teaching in our community of practice.

Participants in the seminar series have included both mathematicians and mathematics educators. We discern some differences between the preferred approaches to teaching of these two groups. For example, there is some evidence that mathematicians prefer to write continuously on large chalk boards so that students can see a progression of mathematics across the boards. Mathematics educators are more likely to use other kinds of technology such as PowerPoint, Electronic Voting Systems or Tablet PCs, believing that these offer helpful ways of engaging students with mathematics. Both groups use the OHP for examples, and some mathematicians use *Beamer* as an alternative to *PowerPoint*. All participants seem to offer notes of some kind and all use examples. However, it is not clear *how* examples are being used and whether there are differences in use. Forms of questioning seem to differ between the two groups but the evidence is not clear as to what kinds of questions prevail. Discussion of such differences leads to a questioning of what we do and how we do it, encouraging us to be more critical of taken-for-granted practices.

There are clearly matters about which it would be useful to know more and on which research might focus, for example relating to use of examples and questions. What most teachers would like to know, is how their students' respond to the teaching they experience, and moreover, the quality of students' associated learning. The following questions are particularly of interest:

- what do students do with the notes provided? For example, are skeleton notes the best approach?
- how do we best equip students with skills to become efficient learners of mathematics and what are those skills?
- how can teaching promote conceptual understanding, and how would we recognise it?
- are there differences in learning mathematics for engineers and mathematicians?

In raising such questions, university mathematics teachers are contributing to a community of inquiry. One presenter (ME3) described his seminar not as "How we Teach" but "How may we/I teach *better*". This is indicative of a value of these seminars in promoting better, or more knowledgeable approaches to teaching. As we discuss the approaches we use and reasons for using them, we gain insights into other possibilities or other ways of seeing things. In the current series we are trying to focus more overtly on research and how research can motivate/inform practice.

A very positive outcome of the seminars is that they bring mathematicians and mathematics educators together to talk about a common area of interest – how we teach mathematics. It seems less important that we have differences in how we approach, or think about teaching, than that we are all faced with similar issues: addressing questions related to students' learning, the degree to which this is conceptual and how we can provide a better learning environment for students. The series has led to a proposal for a curriculum development research project involving the redesign of certain mathematics modules and associated approaches to teaching them – an inquiry outcome. The project involves both mathematicians and mathematics educators working together and has attracted funding, so we shall be reporting on outcomes before too long.

References

Alcock, L. & Weber, K. (2010). Undergraduates' example use in proof construction: purposes and affectiveness. **Investigations in Mathematics Learning**, 3 (1) 1-18.

Burn, R. P. & Wood, N. G. (1995). Teaching and learning mathematics in higher education. **Teaching Mathematics and its Applications**, 14 (1) 28-33.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. **Journal of Mathematics Teacher Education** 9, 187-211.

Jaworski, B. & Matthews, J. (2011). How we teach mathematics: discourses on/in university teaching. **Proceedings of CERME 7, the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education** (pp. 2022-2032). Poland: University of Rzeszów

Wells, G. (1999). **Dialogic inquiry: Toward a sociocultural practice and theory of education**. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Wenger, E. (1998). **Communities of practice: Learning, meaning and identity**. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

(Endnotes)

1 The School of Mathematics includes a Mathematics Education Centre that conducts research into the learning of mathematics and is renowned for student mathematics support.

2 M4 indicates Mathematician number 4; ME5, Mathematics Educator number 5. In the first 20 seminars, 8 Mathematicians and 12 Mathematics Educators presented seminars focusing on their teaching of mathematics.

Heidegger, Hebel e Educação Matemática

John A. Fossa
Depto. de Matemática, PPGECNM e PPGEd da UFRN – Natal, RN

Abstract

Starting from Martin Heidegger's exegesis of the German poet Johann Peter Hebel, the following conclusions are educed: (1) The foundational concept ("schema construction") of constructivism is inscrutable. (2) The teacher cannot make the student theorize and neither can he/she ever be sure whether, or not, the student has engaged in this activity, no matter what he/she (the teacher) does. (3) It is impossible, in principle, to distinguish between (Skemp's) Instrumental and Relational Understanding.

Resumo

A partir da exegese feita por Martin Heidegger sobre o poeta alemão Johann Peter Hebel, as seguintes conclusões são eliciadas: (1) O conceito fundamental ("construção de esquema") do construtivismo não é inteligível. (2) O professor não pode fazer com que o aluno teorizasse, nem pode ter certeza se, ou não, o aluno tenha teorizado nas suas atividades, independente do que o professor faça. (3) É impossível, em princípio, distinguir entre a Compreensão Instrumental e Relacional (no sentido de Skemp).

Johann Peter Hebel (see Photo 1) was a successful short-storey writer and poet, who, for the most part, lived and worked as a teacher and minister, in the metropolis of Karlsruhe in southwestern Germany. His stories, however, were mostly set in the village of his youth, Hausen im Wiesental, and written in the Alemannic dialect native to the place. His most popular work, *Schatzkästlein des rheinischen Hausfreundes* (Treasure Chest of the Family Friend by the Rhine) is available on-line at the Gutenberg Project.

In 1956, Martin Heidegger (see Photo 2) gave a short speech commemorating Hebel. It was published the following year[1] as *Hebel – der Hausfreund* (Hebel, the Household Friend) and, by the way, a recording of Heidegger reading the speech can be easily found on the internet. In what follows I will investigate some implications this speech has for Mathematics Education. Before doing so, however, I will prefix a short personal observation about Heidegger's thought in general and how I think it should be interpreted in today's world.

1 See, for example, Heidegger (1991).

Photo 1. Johann Peter Hebel[2] (1760-1826).

Photo 2. Martin Heidegger[3] (1889-1976).

Personal Observation

The more one learns about Heidegger's collaboration with the Nazis and his collusion with the thesis of German racial superiority, the more appalled one becomes. These attitudes are all the worse for being surreptitiously embedded in complex philosophical works. And yet, the penetrating analysis that Heidegger brought to the question of being has inspired much contemporary humanism of the highest caliber. Is all this to be lost because the basis is rotten at the core? I would suggest otherwise. Perhaps we, in general, have been lucky enough to have unwittingly found some sort of "philosopher's stone" that can transmute the dross of Heidegger's unacceptable tenets into golden precepts. Thus, Heidegger's analysis of *Dasein*, that is "Being-there", his term for man, is so articulated that it is, basically, limited to Germans. By eliminating these limitations and thus generalizing the notion of *Dasein*, we may reject all that is hateful in Heidegger and, in an ironic twist, still find inspiration in his thought.

Hebel Facts

Heidegger starts out, in his talk, by asking: Who is Johann Peter Hebel? The question seems almost ludicrously banal, since Hebel is a well known and widely read writer in Germany, and, if the question is too insipid, the answer seems to be of the same ilk, for Heidegger merely recites some facts about Hebel's life: his birth to German emigrants in Basel, the death of his father when little Johann was but one year old, the consequent move to Hausen and the death of his mother when he was only thirteen. In a few sentences, Hebel's career

2 Source: < www.zeno.org/Literatur.images/I/hebelpor.jpg>.

3 Source:<I,BP.blogspot.com/QFozyeDnCbE/TC8r244YUXI/AAAAAAAABbo/pH9ekAi5w30/s1600/ MH1950b.jpg>.

is recounted: his studies in Erlangen, his position as a schoolteacher in Karlsruhe and the eminent positions he obtained in that city's political and ecclesiastical circles, all of which, it is hinted, is familiar to Heidegger's listeners[4] (and, later, readers) from their own school days.

Nevertheless, Heidegger artfully weaves two important themes into his narrative. The first is that of the homeland, the second that of language. Hausen is, in fact, fairly close to Basel and many Swiss of the area speak a form of the Alemannic dialect. Its rural country life and the simple friendliness of its inhabitants, according to Heidegger, held Hebel spellbound and he would always cherish the thought of returning there to minister to its people. This dream was never realized, but his homeland not only furnished him with material for his artistic accomplishments, but was also a great source of strength and comfort to him.

Another source of strength was his dialect. It may be thought, reflects Heidegger, that by writing in dialect, instead of the standard form of German, Hebel is revealed to be a minor poet, speaking of but a constricted world. The power of language, however, is precisely due to dialect, because it is dialect that forges the ties of man to God, homeland and the world; in a word, it is dialect that is at the origin of beings and makes them enduring and useful. Without the input of dialect, language withers and dies.

Thus, argues Heidegger, it is exactly because Hebel was a masterful regional poet who wrote in dialect that he was a great poet of universal significance. This, then, seems to be the answer to the original question: Hebel is a great poet. In reality, however, this is not an acceptable answer because it is not truly informative until we know how he became the great poet that he is. Thus, concludes Heidegger, we must start over and ask once again: Who is Johann Peter Hebel?

The Household Friend

Hebel conceived of the *Schatzkästlein* as a household friend that would be invited into people's homes to illuminate them. On one level, this was quite appropriate, because the *Schatzkästlein* was not just a collection of stories, but also a kind of almanac. It was, moreover, also appropriate on another level, since it sought to put into words that which endures, thereby allowing Being to awake in his readers. Thus, Hebel became a great poet by being a household friend, that is, by shining his language on beings and enabling them to reveal themselves as beings to be thought about.

Nevertheless, Heidegger, at this point, finds it necessary to start all over again and, thus, posits his question again, albeit in a different form. How is Hebel the household friend? To what house is he a friend?

To answer these new questions, Heidegger argues, we must first grasp that the house is not merely a physical shelter, but the place where the human being lives, or better, dwells[5]. The dwelling itself is a sojourn between multifarious sets of opposites, the most primordial

4 Naturally, these facts would be familiar to German students, but not to most others, just as, for example, the biography of Machado de Assis would be familiar to Brazilian students, but not to most others.

5 We may observe that in English, "to dwell" or "to dwell on" also may mean "to pause reflectively over" or "to mull over". It is in this sense that dwelling is a peculiarly human way of being in the world.

being that of birth and death, but which also include the heavens and the earth, joy and grief, and the deed and the word. Heidegger then names the aggregate of these betweennesses the *world*, that is, the house of human dwelling. Hence, the house befriended by the household friend is the world.

At this point, we might begin to wonder about what Heidegger is getting at, for how could Hebel be a friend to the world, given that he's a dweller in the world? In fact, Heidegger does go on to tell us that Hebel is not really the friend of the world. He gives no reason for this affirmation, simply saying that it is surprising. The real friend of the house, that is, the house of man's dwelling, or the world, is, according to Heidegger, the moon.

The moon is the real household friend since it is she that shines in the night and thereby brings light to the earth shrouded in darkness. Thus, the moon is steadfast, remaining awake throughout the night, preserving and protecting that which is essential, but which man can too easily lose sight of in his sleep.

In this manner, Heidegger himself, in praising the poet Hebel, expresses in poetic language what he elsewhere[6] expresses philosophically. Specifically, by its shining, Being allows beings to reveal themselves to man and be constituted by and for man through man's appropriation of them through language. It is not, however, all language that plays this role, for man easily forgets Being and becomes alienated from the world he dwells in. The great poet, however, uses language in such a way as to recapture the originary event of appropriation and, by doing so becomes a kind of household friend to his/her readers.

Although he does not herein belabor the point, Heidegger implies, should we read between the lines, that the mere reading of poetic works is not enough to recall the reader from his/her forgetfulness and alienation. In fact, if it were enough, there would be no need for exegeses of the type in which Heidegger is engaged in his commentary on Hebel. Rather, the reader must take up the poet's words, preserve them and transform them by renewed events of appropriation. That is to say that the reader (or listener) must relive the poet's original appropriation and, in so doing, becomes a kind of household friend to himself/herself.

A Problem for Mathematics Education

We must now eschew, at least momentarily, Hebel and Heidegger, poetry and philosophy, in order to give thought to Mathematics Education. In relation to this field of study, we see that, from the point of view of constructivism and, especially, radical constructivism, there is a persistent emphasis on the need for the learner to be active in constructing his own knowledge. This is due to the constructivist's understanding of knowledge as being the result of the individual's (reflective) response to his/her environment. This insight is usually fleshed out by the notion of schema. A schema is a way of organizing and relating bits of knowledge in a more or less coherent fashion that permits the individual to comprehend himself/herself and his/her environment, solve problems and anticipate novel events. When one comes upon new bits of knowledge that cannot be encompassed by one's schema, that schema must be modified or replaced by a new schema.

6 See, Fossa (in preparation).

We may mention here that one of the main criticisms that have been directed against constructivism is that it ignores the fact that knowledge is not merely an individual construction, but a social construction. This criticism is not entirely fair, since constructivists do recognize the other as belonging to the environment of the individual. Indeed, this fact comes out strongly in their work in the classroom, since most constructivists are quite committed to teaching with the aid of structured activities to be done by the students in small groups. Nonetheless, it is true that constructivism has not accorded a sufficiently articulated place to the social aspects of knowledge construction in their theory of Mathematics Education. I will return to this criticism briefly at the end of the present article. Now, however, I wish to set forth a more pressing problem.

The problem referred to at the end of the previous paragraph is quite easy to see in the context of constructivism. Since schemata are mental structures, they are not directly accessible to the teacher or the mathematics educator. Thus, in order to determine whether a student has constructed an appropriate schema, the teacher has to use indirect, investigatory methods. In consequence, we arrive at the much misunderstood constructivist maxim that all mathematics teachers must also be researchers; that is, they must do research, not on the frontiers of mathematical knowledge, but on their students' knowledge. The teacher must, so to speak, set up a separate research project for each student in order to determine the appropriateness of that student's mental schema.

The indirect nature of the teacher's investigation, however, makes it impossible to obtain more than corrobatory, as opposed to confirmatory, evidence for the appropriateness of the construction. Asymmetrically, the inappropriateness of a construction can be quite dramatically exposed by differences in expectations. This can be illustrated by a very simple example. Suppose that a student thinks that *even number* means "multiple of five", all others being odd. When the teacher asks whether the sum of two even numbers is even, the student will concur that it is. Again, the teacher may ask for an example of an even number, to which the student may answer "10". Both these answers corroborate the thesis that the student has an appropriate schema for the concept *even number*, since there is no discrepancy between the answers given and the teacher's expectations. In contrast, when the teacher asks the student to identify the only even prime number and receives the answer "5", the discrepancy between the teacher's expectation and the answer given reveals that the student has not constructed an appropriate schema for *even number*. It is at this point that the constructivist teacher seeks to point out some contradiction in the student's reasoning, which will reveal to him/her (the student) the necessity of reformulating his/her schema.

All this is set out quite straightforwardly in constructivist literature (see, for example, von Glassersfeld (1990) or Fossa (1998)). This dynamic, seen from the viewpoint of Heidegger's analysis of Hebel, would seem to imply that the teacher is (or should be) Hebel, the household friend, who enlightens the student and thereby enables him/her to construct the appropriate schema.

A more trenchant analysis, however, reveals some problems. What is counted as "inappropriate constructions" are those that are not consonant with the schema that the teacher is trying to have the student construct. Yet, it is always possible that the student construct an inappropriate schema in this sense, but appropriate in some other sense. The student could, for example, construct a schema that is more general than that of the teacher, or that is in some other way more useful for resolving the problem at hand. Further, it may happen that the student's answer, although conceived of as "wrong" by the teacher, does not incur any contradictions. In the simple example given above, granted the student's definition of *even number*, 5 is indeed the only even prime number.

One may be tempted to respond that the example holds as far as it goes, but that in practice the situation is more complex and, thus, the sought after contradiction is sure to appear sooner or later. Nevertheless, I would like to suggest that to respond in such a fashion is to miss an opportunity to delve much deeper into the constructivist dynamic than is usually done, for that dynamic centers on teacher-student interactions as the mechanism for the transformation of inappropriate" schemata to "appropriate" ones. This is, however, an external activity and, therefore, does not address the central internal activity of the construction of schemata by the student. But, we have already seen that internal activities, and thus the internal activity of schema construction, are not directly accessible to the mathematics educator. In consequence, the problem for Mathematics Education to which the title of this section alludes can be formulated starkly, in the context of constructivism, in the following way: the foundational concept of constructivism is inscrutable.

It is, of course, a mute question whether the inscrutability of this concept will yield to some future, more penetrating analysis. For the present, however, we may make some progress through the medium of metaphor. Thus, I propose to return to philosophy and poetry, Heidegger and Hebel.

The Philosophic Metaphor

A few paragraphs back, we deemed it plausible to identify the constructivist teacher with Hebel, the household friend, who enlightens the student. But, should we take a closer look at Heidegger's analysis, we would find that the purported identification cannot be correct since, as was already observed, Hebel is not the household friend. Further, the household friend (the moon) does not enlighten the members of the household, but rather illuminates the things of the world for the members of the household; once they are illuminated, it is the dwellers of the house themselves who see those things.

Recall that the moon steadfastly protects that which is essential, but which is easily lost sight of in man's slumber. This slumber is man's – or, in our case, the student's – alienation from the essential world of mathematics. He/she does not really see mathematical objects as they are in relation to himself/herself because he/she accepts someone else's account of the mathematical world instead of appropriating it to himself/herself. The act of appropriation constitutes the mathematical entities in relation to the student and this can only be done when the student theorizes about mathematics. Thus, the student only breaks out of his/her alienated state and comes to dwell in the authentic world of true mathematics when he/she constitutes that very world and makes it his/her own by theorizing about it.

Thus, it is the student himself who, as theorist, is the household friend to himself/herself, just as we have seen that the great poet is the household friend to himself/herself. Said differently, the friend of the student's mathematical dwelling is his/her own power of creative thought by which he/she theorizes about mathematics.

What then must we say of the teacher? The good teacher is like the great poet, like Hebel, who relives the original act of appropriation of the great mathematicians. By recreating the original mathematics, the teacher appropriates it to himself/herself and makes mathematics real. Having done so, the good teacher calls the student forth from his/her slumber, points out the soft light of the moon and helps the student to become a theorist.

Here in the context of our philosophic metaphor, however, we meet again the same problem for Mathematics Education that we've already encountered in the context of constructivism. Recall that the reader of Hebel's poems is not automatically recalled from sleepy-eyed alienation by the mere reading of the poems. Rather, the reader must recapture, in his/her reading, Hebel's act of appropriation by renewed acts of appropriation all his/her own. So too, it is not enough for the student to watch the teacher theorize. He/she must participate in the theorizing. But, no one but the student himself/herself is ever directly aware of his/her own appropriation. Theorizing is an internal activity completely dependent upon the student. The teacher cannot make the student theorize and neither can he/she ever be sure whether, or not, the student has engaged in this activity, no matter what he/she (the teacher) does.

In order to try to clarify the nature of this problem a bit further, let us once again eschew poesy and phenomenology, Hebel and Heidegger, and return to constructivist theorists of Mathematics Education.

Instrumental Understanding and Relational Understanding

In an influential article, Richard Skemp (1976) – reprinted in Skemp (1995) – drew[7] a distinction between two kinds of understanding. The lesser of the two is called Instrumental Understanding and refers to the ability to follow rules, albeit mindlessly, whereas the more noble kind is called Relational Understanding and refers to knowledge supported by its underlying reasons. In his own words, Skemp (1995, p. 2) affirms that

> By the former [Instrumental Understanding] is meant what I, and probably most readers of this article, have always meant by understanding: knowing both what to do and why. Instrumental understanding I would until recently not have regarded as understanding at all. It is what I have in the past described as 'rules without reasons', without realizing that for many pupils and their teachers the possession of such a rule, and ability to use it, is what they mean by 'understanding'.

The adjective "instrumental" seems to indicate that understanding of this type is useful in certain situations in which rules are applicable, but also that it is rather static in nature. In contrast, "relational" seems to indicate a dynamic ability to interrelate concepts in a conceptual whole. I will try to flesh out these implicit meanings shortly, but it would auger well to belabor one of the points made in the quotation from Skemp.

The point in question is that the connotations of the word "understanding" imply a depth of knowledge that is only really consonant with what Skemp terms Relational Understanding.

7 Skemp attributes the distinction to Prof. Steig Mellin-Olsen of Bergen University.

Nevertheless, he feels compelled to extend the meaning of this word to cover Instrumental Understanding because those who have this kind of understanding can use it to solve problems successfully. In fact, Skemp (1995, p. 9) argues that "instrumental mathematics" is easier to understand, more quickly grasped and sometimes more reliable than "relational mathematics". In consequence, Instrumental Understanding does not represent a lack of understanding, but an understanding of a different type. He also argues that it is an inferior type because "relational mathematics" is more adaptable and easier to remember than "instrumental mathematics". It also has intrinsic value (a goal in itself) and a tendency to be self-perpetuating. Nonetheless, it would seem that we must conclude, to anticipate the argument, that it may be difficult to determine whether a given student has Relational Understanding or only Instrumental Understanding; this is because a student having only Instrumental Understanding may exhibit the behavior (attainment of correct answers in a quick reliable way) of a student having Relational Understanding.

As stated in the last paragraph but one, I will now try to clarify the concepts of Instrumental and Relational Understanding. Skemp (1995, p. 16) himself gives us a clue as to how to go about this by indicating that Relational Understanding "consists of building up a conceptual structure (schema)", whereas, he seems to say (the text is not entirely clear), Instrumental Understanding is bereft of structure. But, from the constructivist viewpoint which he himself espouses, this cannot be correct, for, from this viewpoint, *all* understanding depends on the building up of schemata.

Since Instrumental Understanding is based on the knowledge of rules and how to apply them in certain situations, it too must be based on schemata. Thus, the difference between the two types of understanding would seem to lie in the quality of the schemata constructed by the learner. Relational Understanding is characterized by well-organized schemata that are rich in interconnections among their various parts, whereas Instrumental Understanding is characterized by poorly organized schemata that have relatively few interconnections. This implies, of course, that Instrumental and Relational Understanding are not really two distinct kinds of understanding, but rather different degrees of understanding. Although this interpretation is perhaps more faithful to our ordinary conception of the word "understanding", it does present a problem for Mathematics Education in terms of evaluation because, even though the poles of a sliding scale may be readily discernible, there are no clear-cut criteria by which to evaluate the middle zone.

I would like to suggest, however, that the situation is really much worse than that stated in the previous paragraph. The deeper problem is revealed by Heidegger's analysis of Hebel, for there we saw that man may dwell in the world in an inauthentic way. He/she does so when he/she does not appropriate beings for himself/herself. In terms of Mathematics Education, the student dwells in an inauthentic mathematical world when he/she builds up schemata from beings that he/she has not constituted in an act of appropriation. In doing so, he/she becomes alienated from the world of true mathematics or, in my terminology, he/she does not theorize about mathematics, but merely reproduces the theorizing of another (perhaps that of the teacher or the textbook writer) and thus should be classified as having only Instrumental Understanding. Nevertheless, the inauthentic puppeting of another's theory may be so accomplished that the student's behavior is indistinguishable from that of the student who actually theorizes about mathematics. In fact, the theorist may be led to investigate "inappropriate" twists in his/her thinking and thereby exhibit behavior which seems

inferior to the student who has but Instrumental Understanding, or even no understanding at all. So once again we arrive at the same problem for Mathematics Education that we have twice formulated in different contexts. The third formulation can be stated in the following way: it is virtually impossible, in principle, to distinguish between Instrumental and Relational Understanding.

Since the distinction between this new kind of Instrumental Understanding and Relational Understanding is a bit subtle, it will be well to look at an example. I am tempted to do so in terms of Brouwer's intuitionist strictures of traditional mathematical proofs, for which see Fossa (1998), but this would lead us too far astray from our present purpose. Thus, I will give a non-mathematical example, once again turning to a poet, this time Lewis Carroll (pen name of Charles Lutwidge Dodgson, 1832-1898). The first stanza of Carroll's poem *Jabberwocky* reads:

> 'Twas brillig, and the slithy toves
> Did gyre and gimble in the wabe:
> All mimsy were the borogoves,
> And the mome raths outgrabe.

The grammatical analysis of this stanza of poetry is (almost) completely straightforward, but many of the words used were invented by the poet and have no meaning in the English language. Nevertheless, it would be quite possible for some student to give a "lucid" exegesis of the poem by building on the linguistic structure it exhibits. He might say something like the following:

> Carroll was quite perspicuous in the third and forth lines because the borogoves are always completely mimsy and the mome raths never ingrabe when it's brillig, and, as was stipulated in the first line, it was indeed brillig.

If we take ingrabe as the contradiction of outgrabe, the proposed exegesis is *logically* impeccable. Unfortunately, it is also completely nonsensical.

What our imaginary student has accomplished in the example is to take the linguistic structure inherent in the poem and accepted it, pre-theoretically, as a meaning bearing medium and then manipulated it according to the standard rules of logic. However, since this structure is really nonsense, the student is living in an alienated world. Metaphorically, this is the same thing that happens when a real student accepts, pre-theoretically, someone else's conceptual schema. By taking over a schema without the foundational experience of the appropriation of the mathematical beings purportedly mentioned in it, the student enters into an alienated mathematical world in which he/she cannot obtain Relational Understanding. Nevertheless, due to his/her ability to manipulate the, for him/her, largely meaningless structure, his/her overt behavior may be indistinguishable from that of a student having Relational Understanding.

Cognitive Information Processing

Cognitive Information Processing and allied theories are other ways of looking at Mathematics Education that are in many ways antithetical to constructivism. Whereas constructivism, especially Radical Constructivism, is based on epistemology, the cognitive approach is based on psychology. The basic metaphor in this approach is that the mind is thought of in terms of a computer program[8] and that, by analyzing the process of knowing in these terms, we can obtain comprehension of this process and develop strategies to enhance it.

It is interesting to observe, however, that at least one researcher who uses the cognitive approach has come to conclusions similar to ours regarding the difficulty of determining whether the student has obtained true understanding. In the context of discussing school algebra word problems, Robert H. Davis (1989, p. 115) observes that

> First, I feared that the reported studies would focus on the usual kinds of "word problems" and would emphasize short-term (and shortsighted) strategies for increasing the odds that a student would seem to do the right thing, even though that student might have virtually no understanding of the problem. We have seen many studies of this type, and they probably tend to lead us in the wrong direction.

Davis' observation is interesting in that it recognizes that the student may indeed behave in such a way that he/she apparently has understanding of the mathematics, even though he/she really has almost no understanding of it at all. But, because Davis comes to the problem from the side of the researcher, not the student, he does not recognize how radical the problem is and thinks that it can be avoided by careful design of the experiment. Nevertheless, his position is evidence that the problem that we have identified in the context of constructivism is not limited to that context.

The Social Construction of Knowledge

As was mentioned above, one of the criticisms leveled against constructivism is that it does not take into account the social construction of knowledge. The true importance of this criticism can, mayhap, be better seen when translated into the language of theorizing. Each person must do his/her own theorizing, but he/she does so in the context of interactions with the other. Thus, theory is developed conjointly by theorists who have the same, or perhaps similar, originary appropriations of mathematical beings.

Many problems, indeed, still remain. Given that appropriation is an event for an individual, how do common originary appropriations occur and how are they to be verified? How can theorizings interact and develop into a common vision? These are old problems, formulated in various ways in the history of philosophy. Herein, however, it is not my purpose to try to answer them, but to merely describe the phenomena and begin to draw some consequences for Mathematics Education.

8 See further Fossa (a sair em 2012).

Conclusion

Inspired by Heidegger's exegesis of Hebel, we are led to a problem for Mathematics Education. The problem can be formulated[9] in at least three distinct ways:

1. The foundational concept ("schema construction") of constructivism is inscrutable.
2. The teacher cannot make the student theorize and neither can he/she ever be sure whether, or not, the student has engaged in this activity, no matter what he/she (the teacher) does.
3. It is virtually impossible, in principle, to distinguish between Instrumental and Relational Understanding.

The problem, it would seem, is unsolvable. Nevertheless, it is extremely important that the mathematics educator be aware of it. For, although the mathematics educator cannot make the student theorize, he/she can develop activities that may be helpful in inducing the student to theorize about mathematics. I will present, in another place (Fossa, in preparation), some reasons for concluding that the History of Mathematics can be very helpful in this regard.

References

DAVIS, Robert H. Three ways of improving cognitive studies in algebra. In: WAGNER, Sigrid; KIERAN, Carolyn (Eds.). **Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra**. Reston (VA): NCTM, 1989. P. 115-119.

FOSSA, John A. Conhecimento como apropriação e a História da Matemática como agente de cognição. In preparation.

______. Um esquema para o processamento de informação cognitiva. In: FOSSA, John A. **Ensaios sobre Educação Matemática**. 2. ed. Livraria da Física, a sair em 2012. Cap. 7.

______. **Teoria Intuicionista da Educação Matemática**. Natal: EDUFRN. 1998.

HEIDEGGER, Martin. **Hebel der Hausfreund**. Stuttgart: Neske, 1991.

VON GLASSERSFELD, Ernst. An exposition of constructivism: why some like it radical. In: DAVIS, R. B.; MAHER, C. A.; NODDINGS, N. (Eds.). **Constructivist views on the teaching and learning of mathematics**. Reston (VA): NCTM, 1990. Cap. 2, p. 19-29.

SKEMP, Richard R. **Mathematics in the Primary School**. London: Routledge, 1995.

______. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, Derby [Inglaterra], Issue 77, p. 20-26, Dec., 1976.

9 Should one so desire, these may also be conceptualized as three distinct, but closely related, problems.

Do Saber Matemático ao Fazer Pedagógico: o desafio da educação

Ubiratan D'Ambrosio[1]

Resumo

A Matemática, como todas as formas de conhecimento, está em permanente evolução, obedecendo ao ciclo do conhecimento e tendo seus momentos de geração, organização intelectual e social, e difusão. Uma das questões mais intrigantes é entender a transição da geração do conhecimento matemática até sua difusão, isto é, do fazer Matemática ao ensinar Matemática. Não há contestação do saber matemático. Ninguém nega sua importância na sociedade atual e do futuro. O que se contesta, ao interpretar várias opiniões e os péssimos resultados em testes, é o fazer pedagógico que está desinteressante, obsoleto e inútil. Apesar de um fazer pedagógico contestado, o saber matemático é bem absorvido pelas novas gerações, como mostram os consideráveis avanços na Ciência, na Tecnologia, nos meios de produção e nos serviços, todos ricos em conteúdo matemático. A sociedade está ancorada em instituições, todas baseadas num sistema de conhecimentos organizado em disciplinas. O fato incontestável é que estamos buscando a superação do paradigma disciplinar da ciência moderna: novos paradigmas, era da consciência, transdisciplinaridade, nova era, holismo, complexidade. Tenho discutido isso amplamente em muitas publicações, em particular no livro *Educação para uma Sociedade em Transição*. Em todas essas discussões, a Matemática aparece como central. Este trabalho sintetiza algumas das ideias que resultam de um outro pensar sobre a Educação Matemática. Muitas das ideias apresentadas neste trabalho estão em trabalhos e livros publicados.

Palavras-chave: Educação Matemática; Saber Matemático; Saber Pedagógico.

Abstract

Mathematics, as all forms of knowledge, is in permanent evolution, obeying the cycle knowledge and having its moments of generation, intellectual and social organization and diffusion. One of the most intriguing issues is to understand the transition of the mathematical knowledge generation to its diffusion, that is, the mathematical doing to the mathematical teaching. There is no contradiction to the mathematical knowledge. No one denies its importance in the actual and future society. What contradicts when interpreting various opinions and the bad tests result, it is the pedagogical knowledge which is not interesting, obsolete and useless. Although a contradict pedagogical knowledge, the mathematical knowledge is well absorbed by new generations as the considerable success in Science, in Technology, in the production means and in services, all rich in mathematical contents. The society is linked to institutions, based on a knowledge system organized in disciplines. The indisputable fact is that we are seeking the overcoming of the disciplinary paradigm of modern science: new paradigms, era of consciousness, transdisciplinarity, new era, holism, complexity. I largely discuss this in many publications, in particular in the book *Education to a Society in Transition*. In all these discussions, the Mathematics shows as central. This article synthesizes some of the ideas which results from other thinking about Mathematics Education. Many of the presented ideas in this article are discussed in published papers and books.

Keywords: Mathematics Education; Mathematical Knowledge; Pedagogical Knowledge.

1 Professor na Pós-Graduação em Educação Matemática da UNIBAN/Universidade Bandeirantes de São Paulo.

Introdução

Estamos vivendo um momento de contestação e de renovação do conhecimento, que se originou no Renascimento e sobre o qual se fundou a civilização moderna. Essa civilização prometia relações éticas entre todos os seres humanos. No setor de trabalho, na participação de todos na governança e nas relações sociais. As promessas não foram cumpridas! A sociedade é ancorada em instituições, todas baseadas num sistema de conhecimentos organizado em disciplinas. O fato incontestável é que estamos buscando a superação do paradigma disciplinar da ciência moderna. Várias denominações destacam focos distintos para essa superação: novos paradigmas, era da consciência, transdisciplinaridade, nova era, holismo, complexidade. Tenho discutido isso amplamente em muitas publicações, em particular no livro *Educação para uma Sociedade em Transição*. Em todas essas discussões, a matemática aparece como central. Este trabalho sintetiza algumas das idéias que resultam de um outro pensar sobre a Educação Matemática. Muitas das idéias apresentadas neste trabalho estão em trabalhos e livros publicados.

Sobre a Matemática

A Matemática, como todas as formas de conhecimento, está em permanente evolução. Obedece ao ciclo do conhecimento e tem seus momentos de geração, organização intelectual e social, e difusão. Particularmente importante para nós é a difusão, pois dentre as mais comuns formas de difusão está a educação. Uma das questões mais intrigantes é entender a transição da geração do conhecimento matemática até sua difusão. Isto é, do fazer matemática ao ensinar Matemática.

Duas perguntas fundamentais se colocam:

1. quem faz pode ensinar o que fez?
2. alguém pode ensinar o que outros fizeram?

e duas perguntas conseqüentes são inevitáveis:

1. o matemático (aquele que faz matemática) pode ser um bom professor de Matemática?
2. é possível ser um bom professor de Matemática sem fazer Matemática?

Podemos ampliar essas questões perguntando:

1. o que é um professor de Matemática?
2. o que é um educador?
3. qual a diferença entre um professor e um educador?

Professor e educador

Professor é aquele que professa ou ensina uma ciência, uma religião, uma arte, uma técnica, uma disciplina. Educador é aquele que promove a educação.

A missão do professor não é usar sua condição de professar ou ensinar uma disciplina para fazer proselitismo, isto é, converter para a sua disciplina, mas sim usar sua disciplina como instrumento para atingir os objetivos maiores da Educação. Em outros termos, subordinar sua disciplina, isto é, os conteúdos, a objetivos maiores.

Pergunta-se então quais são esses objetivos maiores? Dou a resposta em termos de uma definição.

Educação é a estratégia desenvolvida pelas sociedades para:

(i) possibilitar a cada indivíduo atingir seu potencial criativo E

(ii) estimular e facilitar a ação comum, com vistas a viver em sociedade, exercitando a cidadania plena.

Pergunta-se então se é justificável transmitir conhecimentos disciplinares (conteúdos) como parte da educação? Em particular, conteúdos matemáticos? A História nos diz que sim, desde que contextualizados no espaço e no tempo, utilizando as metodologias disponíveis no momento.

Daí vem outra pergunta: como contextualizar a Matemática?

Essas questões podem ser sintetizadas nas questões clássicas, que dominaram a Educação Matemática no início do século XX: por que ensinar? o que ensinar? como ensinar? e que deram origem aos estudos tradicionais sobre currículo: objetivos (por que), conteúdos (o que), e métodos (como). Esses estudos, baseado na discussão de objetivos, conteúdos e métodos, são fechados na disciplina. Deveriam ser reescritos como objetivos do ensino da Matemática, conteúdos matemáticos e métodos de ensinar Matemática. Assim, ainda se insiste que o principal objetivo é sua utilidade no cotidiano e no desenvolvimento do raciocínio, o conteúdo é aquele que vem de programas anteriores, definidos há muito tempo, e os métodos são geralmente exposição, tirocínio e cobrança por testes. Eu digo que objetivos assim definidos são falsos, os conteúdos são obsoletos e os métodos tornam os alunos emburrados (ver o sentido em Houaiss).

Insisto no princípio básico de ancorar a prática educativa nos objetivos maiores da educação, que são essencialmente responder aos anseios do indivíduo e prepará-lo para a vida em sociedade, isto é, para a cidadania. O grande desafio é, portanto, combinar o individual e o social. Não priorizar um sobre o outro, mas tratá-los como dois aspectos, não excludentes e mutuamente essenciais, do comportamento humano. Talvez esse seja um dos temas mais fascinantes no estudo do homem.

Por que ensinar Matemática?

A Matemática comparece como disciplina obrigatória e dominante em todos os currículos do Ensino Fundamental e Ensino Médio de todos os sistemas escolares. A pergunta que todos deveriam fazer é “Por que?”.

Muitos fazem essa pergunta. Explicitando o que foi discutido no parágrafo anterior, as respostas vêem de várias maneiras:

- Porque Matemática é importante para o dia-a-dia e sem Matemática não podemos viver no mundo moderno.
- Porque Matemática ajuda a pensar melhor e desenvolve o raciocínio.
- Porque Matemática está em tudo e é a matéria mais importante,
- que define o rendimento dos alunos nos estudos.

E assim por diante. A questão "por que?" deveria estar permanentemente presente na prática docente. Uma pesquisa sempre interessante, mesmo que já tenha sido feita inúmeras vezes, é sentir a opinião do professor, do profissional, do jovem, do indivíduo comum, sobre as questões acima.[2]

Com preocupação eu percebo que há um risco de desaparecimento da Matemática como disciplina autônoma dos sistemas escolares. Mas, repito o que disse acima neste trabalho, se ela continuar a ser ensinada da maneira como vem sendo, isto é, obsoleta, inútil e desinteressante, ela corre o risco de sair dos sistemas escolares.

Os testes padronizados

Há poucos dias assistimos o drama de vários alunos frustrados com as provas do ENEM, realizadas nos dias 22 e 23 de outubro de 2011. Foram milhões de jovens com a esperança que bons resultados no ENEM podem abrir as portas para um futuro profissional. É inegável que essa possibilidade existe. Mas é certo o gasto emocional e financeiro para se atingir esses resultados. A oportunidade criada pelo sucesso é real.

Curioso lembrar o que Évariste Galois, um dos mais brilhantes matemáticos da história, nascido em 1811 e morto com 20 anos em conseqüência de um duelo mal explicado, escreveu sobre os resultados dos testes padronizados, característicos da França napoleônica:

> "Vocês se sentem muito felizes por terem se saído bem nas provas? Vocês serão escolhidos como um dos duzentos geômetras que serão contratados? Vocês acreditam estar no topo: vocês se enganam, como mostrarei numa próxima carta."[3]

A próxima carta não foi escrita, pois Galois morreu pouco depois.

2 Esse foi o tema de seção intitulada "Por que Ensinar Matemática?" que coordenei no Terceiro Congresso Internacional de Educação Matemática, realizada em Karlsruhe, Alemanha, em 1976. O trabalho intitulado "Metas y Objectivos Generales de la Educación Matemática" foi publicado como Capítulo IX de *Nuevas Tendencias en la Enseñanza de la Matemática IV,* ed. Luis Santaló, UNESCO-ICMI, Paris, 1979; pp.205-226.

3 *Gazette des Ecoles: Journal de l'Instruction Publique, de l'Université, des Séminaires*, Paris, numéro 110, 2e année, Janvier 1831.

Notamos que muito na educação está pautado por testes. Há insistência em testes padronizados para avaliar o aprendizado de um currículo que está defasado com o mundo atual. O problema não é apenas no Brasil.

O protesto de professores e associações contra os testes é grande em todo o mundo. A prestigiosa organização *NCTM: National Council of Teachers of Mathematics*, dos Estados Unidos, dedicou o último número de sua publicação *Mathematics Education Dialogues*, May/June 1998, a uma discussão sobre testes.[4] No editorial lê-se:

> "O conhecimento dos professores [na sua atuação em aula] é intuitivo e pessoal [e reconhece] que o tipo de teste aplicado por alguma autoridade externa – o estado, o governo federal, o distrito escolar – tem conseqüências para suas classes e para suas vidas. Nem todas essas conseqüências são salutares, seja para eles, os alunos, ou o sistema como um todo".

e no mesmo número, um jovem professor, Sandy Orsten, de Calgary, Canada, se manifesta dizendo:

> "os testes comparam distrito contra distrito, escola contra escola e mesmo professor contra professor. Isto aconteceu apesar das repetidas afirmações ao contrário das autoridades que administraram os testes. ... os testes se tornaram uma ameaça aos professores, pois os resultados são publicados anualmente nos jornais locais. O impacto dessa forma de testar fez com que eu me tornasse céptico sobre a atitude das autoridades ao se dizerem guardiães dos interesses do público em vez de apoiarem a profissão dos professores.... Orgulho pessoal em ter seus alunos se saindo bem nos testes torna-se a maior motivação para os professores, não a compreensão e confiança na matemática que os seus alunos aprenderam."

Resumindo, os testes representam um grande equívoco do ponto de vista educacional. Lá como cá, antes e agora. Um questionamento duro sobre testes padronizados constituiu o Editorial *Evaluation is not a Race*, da prestigiosa revista *Science*,vol.332, 24, p. 148, June 2011:

> "O mundo está mudando rapidamente. Capacidade de resolver problemas e análise crítica tornaram-se muitíssimo mais importante que ser capazes de responder às questões típicas dadas num teste padronizado."

O mais grave é que enquanto a energia do sistema educacional prepara estudantes para se saírem bem nos testes, deixa-se de lado a necessária inovação educacional. Isso é particularmente grave em Matemática, disciplina que deve ter seu currículo repensado.

Repensar o currículo

Tenho me referido com freqüência ao ensino elementar, propondo um novo *trivium*, organizado em Instrumentos Comunicativos, Instrumentos Analítico-Simbólicos e Instrumentos

4 http://www.nctm.org/uploadedFiles/Lessons_and_Resources/dialogues/May-June_1998/1998-05(1).pdf

Tecnológicos.[5] Utilizei, para esses instrumentos, três neologismos: Literacia, Materacia e Tecnoracia. Embora Literacia e Materacia já tenham sido utilizadas por outros autores, o sentido que dou a elas é diferente. Essencialmente:

> Instrumentos Comunicativos (LITERACIA) desenvolvem no aluno a capacidade de processar informação escrita, o que inclui leitura, escritura e cálculo, na vida quotidiana.
>
> Instrumentos Analítico-Simbólicos (MATERACIA) capacitam o aluno para interpretar e manejar sinais e códigos e de criar e utilizar modelos para suas ações na vida quotidiana.
>
> Instrumentos Tecnológicos (TECNORACIA) capacitam o aluno para usar e combinar instrumentos, simples ou complexos, avaliando suas possibilidades e suas limitações e a sua adequação a necessidades e situações diversas.

Não se trata apenas de apreender técnicas, mas o importante é que o espírito crítico esteja permeando a prática. Desse modo será possível abordar os Temas Transversais, propostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais.[6] Os Temas Transversais sintetizam, a meu ver, o objetivo mais importante dos Ensinos Fundamental, Médio e Superior. E o *trivium* proposto acima é fundamental para a abordagem dos Temas Transversais.

A prioridade não pode ficar em ensinar uma disciplina pela disciplina, com a justificativa que aquilo está nos programas e que terá utilidade na vida futura. A ilusão de justificar um currículo por ser importante para um "provão" decreta o fim do sistema educacional. Assim como o Ensino Médio ficou – e ainda é – muitíssimo prejudicado pelo vestibular, o mal será ainda maior no Ensino Fundamental focalizado num "provão".

Acredito que uma boa formação de professores e de profissionais, alertas para os avanços científicos e tecnológicos, é essencial para que as escolas sobrevivam.

Particularmente importante é o caso da Matemática. Há grande necessidade de uma matemática atual. Se os Educadores Matemáticos não assumirem seu ensino, este será feito por outros e a Matemática será incorporada a outras disciplinas e perderá seu caráter de disciplina autônoma no currículo do futuro.

Isso é verdade na vida profissional. Aceita-se que a Matemática é essencial para o sistema de produção, mas tolera-se que a Matemática seja inacessível para aqueles que produzem. Este é um dos principais fatores de desigualdade social. A mitificação da Matemática e portanto dos sistemas de produção, é algo reconhecido já no início do século, quando aparecem cursos de Cálculo com forte ênfase teórica, inacessíveis ao cidadão. O Cálculo tornou-se algo equivalente ao *pons asinorum* da Grécia Clássica.

5 Ubiratan D'Ambrosio: Literacy, Matheracy, and Technoracy: A Trivium for Today, *Mathematical Thinking and Learning*,1(2),1999; pp.131-153. Essas idéias foram discutidas nos meus artigos "Educação: Nas Lições do Passado, as Perspectivas para o Futuro", *Estudos Leopoldenses-Série Educação*, vol. 2, n° 2, Janeiro/Junho 1998; pp.7-16, e "Literacia e Materacia. Objetivos da Educação Fundamental", *Pátio. Revista Pedagógica* (Porto Alegre), ano I, n° 3, Novembro 1997/Janeiro 1998; pp. 22-26.

6 Ver a série "Temas Transversais", Editora Fundação Peirópolis, São Paulo, particularmente o volume 2: Conhecimento, Cidadania e Meio Ambiente, 1998.

Na entrevista gravada que deu para o Oitavo Congresso Internacional de Educação Matemática, realizado em Sevilha em 1996, Paulo Freire diz:

> "eu acho que uma preocupação fundamental, não apenas dos matemáticos, mas de todos nós, sobretudo dos educadores, a quem cabe certas decifrações do mundo, eu acho que uma das grandes preocupações deveria ser essa: a de propor aos jovens, estudantes, alunos homens do campo, que antes e ao mesmo em que descobrem que 4 por 4 são 16, descobrem também que há uma forma matemática de estar no mundo. Eu dizia outro dia aos alunos que quando a gente desperta, já caminhando para o banheiro, a gente já começa a fazer cálculos matemáticos. Quando a gente olha o relógio, por exemplo, a gente já estabelece a quantidade de minutos que a gente tem para, se acordou mais cedo, se acordou mais tarde, para saber exatamente a hora em que vai chegar à cozinha, que vai tomar o café da manhã, a hora que vai chegar o carro que vai nos levar ao seminário, para chegar às oito. Quer dizer, ao despertar os primeiros movimentos, lá dentro do quarto, são movimentos matematicizados. Para mim essa deveria ser uma das preocupações, a de mostrar a naturalidade do exercício matemático. Lamentavelmente, o que a gente vem fazendo, e eu sou um brasileiro que paga, paga caro... Eu não tenho dúvida nenhuma que dentro de mim há escondido um matemático que não teve chance de acordar, e eu vou morrer sem ter despertado esse matemático, que talvez pudesse ter sido bom. Bem, uma coisa eu acho, que se esse matemático que existe dormindo em mim tivesse despertado, de uma coisa eu estou certo, ele seria um bom professor de Matemática. Mas não houve isso, não ocorreu, e eu pago hoje muito caro, porque na minha geração de brasileiras e brasileiros lá no Nordeste, quando a gente falava em matemática, era um negócio para deuses ou gênios. Se fazia uma concessão para o sujeito genial que podia fazer Matemática sem ser deus. E com isso, quantas inteligências críticas, quantas curiosidades, quantos indagadores, quanta capacidade abstrativa para poder ser concreta, perdemos. Eu acho que nesse congresso, uma das coisas que eu faria era, não um apelo, mas eu diria aos congressistas, professores de Matemática de várias partes do mundo, que ao mesmo tempo em que ensinam que 4 vezes 4 são 16 ou raiz quadrada e isso e aquilo outro, despertem os alunos para que se assumam como matemáticos."[7]

A mitificação do saber matemático, reforçado pelos testes e exames rotineiros, é a maior causa de negar ao povo o importante instrumento de crítica proporcionado pela Matemática.

Os testes e exames, ao mesmo tempo que negam à grande maioria da população o acesso à cidadania plena, tampouco estimulam o indivíduo a realizar todo o seu potencial criativo. Assim, nenhum dos dois objetivos maiores da educação é atingido.

Um livro notável, publicado em 1910, procurou desmitificar o Cálculo. Seu autor, Silvanus P. Thompson, um prestigioso engenheiro inglês, diz no Epílogo do livro:

> "Pode-se ter certeza que quando este tratado *Calculus Made Easy [Cálculo Tornado Fácil]* cair nas mãos de matemáticos profissionais, eles (se não forem muito preguiçosos) se levantarão como um só homem, e dirão que o livro é

7 Uma transcrição dessa entrevista é disponibilizada no site http://vello.sites.uol.com.br/ubi.htm

péssimo. ...Uma outra coisa, aqueles que se dizem matemáticos dirão sobre esse livro inteiramente ruim e pernicioso: a razão pelo qual ele é *tão fácil* é porque o autor deixou de lado todas as coisas que realmente são difíceis. E o fato chocante sobre essa acusação é que – *é verdade!* Essa é de fato a razão porque esse livro foi escrito – escrito para uma legião de inocentes que já foram desencorajados de adquirir os elementos do Cálculo pela maneira estúpida como seu ensino é quase sempre apresentado. Qualquer assunto pode se tornar repulsivo se for apresentado destacando as suas dificuldades."[8]

A estratégia é familiarizar, o aprendiz com as idéias, ilustradas por exemplos simples. Em pouco mais de 200 páginas, o livro cobre um curso de Cálculo.

O princípio que Silvanus P. Thompson defende é uma pedagogia da desmitificação, que muitos chamam de ingênua. Não se impede uma pessoa que não sabe fazer um relógio de usá-lo. Assim como manejar uma calculadora não exige que se faça o que calculadora faz.

É interessante que Silvanus Thompson faz um paralelo com o ensino da Gramática. Diz que a Gramática se elabora sobre o ato de falar.

Com motivação e objetivos completamente diferentes, Maria Suzett Biembengut propõe um estudo de Gramática associado com a oralidade dos alunos. Da linguagem espontânea, fazendo uso de desenhos e cores, ela leva o aluno a reconhecer a gramaticalidade da língua. Esse é um enfoque ao ensino da linguagem absolutamente afim com o a Etnomatemática.[9] De fato, ela incorpora no estudo da redação a codificação matemática. Ao descrever através de desenho a sua pessoa e a sua casa, a criança toma consciência dos numerais e da sua importância na vida do homem como, por exemplo, endereço, dinheiro, medida, etc (p.35). Esse é um exemplo da prática da Literacia.

Familiarizar o aprendiz, reforçar sua autoestima, criar confiança nas suas habilidades, pode ser um excelente instrumento pedagógico. Essa é a proposta de Carl Rogers, infelizmente pouco conhecida. Na mesma direção vai a proposta da Inteligência Emocional, de Daniel Goleman. Muitos matemáticos dizem "com matemática é diferente". Essa não é a posição de Hassler Whitney que, como muitos outros, procurava trabalhar sobre o emocional da criança, estimulando a autoconfiança e a criatividade na Educação Matemática.[10]

Calculadoras, computadores e uma nova Matemática

Com a disponibilidade de calculadoras e de computadores, o ensino da Matemática deve mudar radicalmente de orientação. Lamentavelmente, ainda permanece a insistência em ensinar "rigorosamente" como fazer operações e resolver equações. Não é de estranhar o desencanto cada vez maior dos alunos com a Matemática. O mesmo se pode dizer sobre a Física, a Química e praticamente todas as disciplinas tradicionais.

8 Silvanus P. Thompson: *Calculus made easy*, Third Edition, St. Martin's Press, New York, 1946; p.236-237.
9 Maria Suzett Biembengut Santade: *Oralidade e Escrita dos Esquecidos numa Gramaticalidade Visual*, Dissertação, Faculdade de Educação da Pontifícia Universidade Católica de Campinas, 1998.
10 Ver Hassler Whitney, *Elementary mathematics activities:Part A, Trial materials*, Institute for Advanced Studies, Princeton, 1974.

É interessante notar que Rui Lopes Viana Filho, o "garotão nota 10" que obteve uma medalha de ouro na 39ª Olimpíada Internacional de Matemática, diz que:

"Se me pedirem para fazer uma multiplicação de números na casa de milhões ou bilhões, terei muita dificuldade e provavelmente errarei. Isso é coisa de máquina, função de uma boa calculadora ou de um computador. As pessoas acham que o bom matemático é aquele que sabe fazer contas mirabolantes. Não é verdade. Em geral, os melhores matemáticos têm aversão a esse tipo de operação ... A maioria dos gênios calculistas são autistas ou débeis mentais."[11]

Os alunos estão aprendendo mal os programas tradicionais. Mas isso não faz falta. O mais grave é que não estejam aprendendo coisas realmente importantes nos cursos de Matemática. Insistir no inútil, desinteressante e obsoleto esgota tempo e energia do aluno.

O matemático Mikhail L. Gromov, do Institut des Hautes Études Scientifiques da França, recebeu em 2009, o Prêmio Abel, que é o correspondente ao Prêmio Nobel em Matemática. Num artigo, publicado em 1998, Gromov dizia:

"nós matemáticos muitas vezes temos pouca idéia sobre o que está se passando em Ciência e Engenharia, enquanto os cientistas experimentais e engenheiros muitas vezes não se apercebem das oportunidades oferecidas pelo progresso da Matemática Pura. Este perigoso desequilíbrio deve ser restaurado trazendo mais ciências para a educação dos matemáticos e expondo os futuros cientistas e engenheiros a matemática central. Isto requer novos currículos e um grande esforço de parte dos matemáticos para trazer as técnicas e idéias matemáticas fundamentais (**principalmente aquelas desenvolvidas nas últimas décadas**) a uma audiência maior. Necessitamos para isso a criação de uma nova geração de matemáticos profissionais capazes de trafegar entre matemática pura e ciência aplicada. A fertilização cruzada de idéias é crucial para a saúde tanto das ciências quanto da matemática."[12]

Embora Gromov esteja se referindo à formação de graduação e pós-graduação, a situação é a mesma nos ensinos Fundamental e Médio.

Destaquei a citação no parêntesis, pois esse é o ponto crucial. Quase todos os nossos currículos, em todos os níveis de ensino, ignoram os avanços das últimas décadas. Com argumento falso de que é necessário uma base clássica para se entender o que é novo, tem se insistido numa pedagogia que eu chamo propedêutica, na qual se está, permanentemente, preparando para estudos seguintes. Seria importante desenvolver uma pedagogia em direção contrária, parecida com o que os pós-modernistas chamam deconstrução quando tratam da análise literária. Deixa-se a mente brincar com pressuposições e intertextualidade. Curioso que meus colegas da área de Computação usam o termo "brincar" para se referir à maneira mais praticada de adquirir domínio do computador.

Isso em Matemática é possível. Um exemplo muito intrigante é o curso de Física lecionado por Richard P. Feynman, um dos mais destacados físicos do século. O seu curso

11 Entrevista: Rui Lopes Viana Filho, *Veja*, 5 de agosto de 1998; p.13.
12 Mikhael Gromov: "Possible Trends in Mathematics in the Coming Decades", *Notices of the AMS*, vol.45,n.7, August 1998;pp.846-847.

básico, para calouros da universidade, dispensa pré-requisitos matemáticos. É um curso difícil. Feynman observa, no Prefácio, sobre sua experiência em ensinar cursos tradicionais:

> "Os alunos ouviram muito sobre quão interessante e desafiador é a Física – a Teoria da Relatividade, Mecânica Quântica, e outras idéias modernas. No fim de dois anos [no curso tradicional, os estudantes ficavam] desencorajados, pois havia poucas idéias grandes, novas, modernas apresentadas para eles. Eles eram obrigados a estudar planos inclinados, Eletrostática, e assim por diante, e depois de dois anos estavam absolutamente emburrados".[13]

Claro, Feynman está se referindo aos cursos universitários. Mas a situação é ainda mais grave no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. O desencanto dos alunos com os cursos é o maior empecilho ao seu rendimento na escola.

A razão pela qual menciono essa experiência é que Feynman desenvolve, à medida que o curso avança, toda a Matemática necessária, sempre fazendo referência ao porque tal e qual teoria surgiu. A Matemática vai sendo desenvolvida a medida que se faz necessária. O mesmo pode ser feito através de um novo enfoque à resolução de problemas. A modelagem é o melhor exemplo desse enfoque.

Gosto de repetir um problema que pode ser usado em todos os níveis de escolaridade. Mapear o trajeto da casa para a escola. Não vejo outro exemplo tão simples para trabalhar espaço e tempo, medidas e operações aritméticas. Sobretudo tendo uma calculadora.

Mesmo tratando de tópicos da chamada Matemática Pura, esse enfoque deconstrucionista tem muitas possibilidades. Por exemplo, trabalhar o Teorema de Fermat. Esse é um bom exemplo, sob vários aspectos. Nenhum resultado matemático se tornou tão popularizado quanto o Teorema de Fermat nesses últimos anos. Saiu em primeira página dos principais jornais. Talvez seja um dos problemas numéricos mais fáceis de serem formulados. E que pode manter crianças fazendo Matemática como que brincando por algum tempo. Sobretudo tendo uma calculadora.

Sobretudo tendo uma calculadora ... que já temos!

Uma vez aceita a calculadora sem restrições, estaria desfeito o nó górdio da Educação Matemática. Isto porque a calculadora sintetiza, na Matemática, as grandes transformações de nossa era e a entrada de uma nova tecnologia em todos os setores da sociedade. Basta lembrar que com a adoção do sistema de numeração indo-arábico abriu-se, na Europa, toda uma nova organização mercantil. E dificilmente Newton teria avançado tanto sem as novas possibilidades que a invenção dos logaritmos abriu para os cálculos. Não consigo entender porque razão a calculadora ainda não se incorporou integralmente à Matemática escolar. Aulas de Matemática. Alguns admitem o uso das calculadoras, mas... E por conta desse "mas" vêm as restrições, todas baseadas em idéias falsas, verdadeiros mitos na Educação Matemática.[14] A incorporação de toda a tecnologia disponível no mundo de hoje é essencial para tornar a Matemática uma ciência de hoje.

Três sugestões que podem tornar a Matemática uma disciplina apreciada e útil na escola:

1. Integrar a Matemática no mundo moderno, discutindo e analisando os problemas maiores da humanidade;
2. Incorporar no fazer matemático escolar toda a tecnologia disponível;
3. Propor questões desafiadoras, não meros exercícios, e recuperar o lúdico na Matemática.

De outra maneira, a Matemática poderá encontrar seu fim nos currículos escolares. Não se trata simplesmente de uma preocupação sem fundamento. No final de setembro de 2011, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo propôs uma redução de 20% do número de aulas de Português e Matemática no Ensino Médio numa reformulação curricular, com o objetivo de criar mais espaço para disciplinas como Sociologia e Língua Espanhola. Um argumento do Secretário de Educação, Herman Voorwald, é que o número de aulas de Português e Matemática não é o mais relevante, pois "com a grade do jeito que está, nós estamos bem em Português e Matemática? Não! Isso mostra como a questão é mais complexa do que uma hora a mais ou a menos de aula."[15] A pronta reação do Governador Geraldo Alckmim contra a proposta fez com que o assunto fosse possivelmente arquivado. Mas como diz o dito popular: "onde há fumaça, há fogo". Pode-se notar uma descrença da sociedade no ensino da Matemática nas escolas.

Não há contestação do saber matemático. Ninguém nega a importância da Matemática na sociedade atual e do futuro. O que se contesta, ao interpretar essas várias opiniões e os péssimos resultados nos testes, é o fazer pedagógico, que está desinteressante, obsoleto e inútil. Apesar de um fazer pedagógico contestado, o saber matemático é bem absorvido pelas novas gerações, como mostram os consideráveis avanços na Ciência, na Tecnologia, nos meios de produção e nos serviços, todos ricos em conteúdo matemático. É inevitável que muitos setores da sociedade comecem a considerar o fazer pedagógico da Matemática, isto é, a Matemática escolar, como dispensável e acreditar que o que é importante em Matemática aprende-se apesar dos fracassos escolares. Analisar o porquê das propostas de redução de Matemática escolar e o evidente rebaixamento do nível de exigências com o objetivo de se obter resultados menos embaraçosos em provões inidôneos é, no meu entender, o maior desafio da Educação Matemática atual.

13 Richard P. Feynman, Robert B. Leighton and Matthew Sands: *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1963; p.3.

14 Ver minha conferência "Mitos e Adornos na Educação Matemática", *Anais do IV ENEM: 4° Encontro Nacional de Educação Matemática (Blumenau, 26 a 31 de janeiro de 1992)*, SBM/FURB, Blumenau, 1995; pp.26-33.

15 *O Estado de São Paulo*, 29 de setembro de 2011, p.A24.

Um espelho para a Etnomatemática: os artigos da área em periódicos nacionais de Educação Matemática

Wanderleya Nara Gonçalves Costa[1]

Resumo

A questão "como a Etnomatemática tem-se apresentado nos trabalhos publicados em periódicos nacionais de Educação Matemática" foi a origem deste artigo cujo objetivo é discutir a importância dos periódicos científicos e apresentar os resultados das análises de artigos sobre Etnomatemática publicados nos últimos vinte e cinco anos. Tais análises foram orientadas por perguntas que enfatizaram: o tema, o objetivo, os procedimentos de pesquisa, a modalidade do texto, os aspectos teóricos e os autores mais citados. Os resultados indicam que: a) muitas informações empíricas foram disponibilizadas e referenciais teóricos consideráveis foram desenvolvidos, b) os pesquisadores têm optado por diferentes gêneros textuais; c) tem-se ampliado o número de instituições que abrigam pesquisadores, assim como de regiões do País que congregam grupos de pesquisa na área. Em vista disto, a Etnomatemática tem-se revelado como área onde existe vitalidade, polissemia e sensibilidade, mas que carece, entre outros, da constituição de uma rede de pesquisadores e de fortalecer grupos de pesquisa em algumas regiões do País.

Palavras-chave: Periódicos científicos. Bolema. Publicações etnomatemáticas.

Abstract

The question "how ethnomathematics has been presented in papers published in national journals in mathematics education" was the source of this article which purpose is to discuss the importance of scientific journals and presents results of analyzes of published articles on Ethnomathematics in the last twenty five years. These analyzes were guided by questions that emphasized: the theme, purpose, research procedures, the modality of the text, the theoretical aspects and the authors cited. The results indicate that: a) many empirical data were available and considerable theoretical frameworks have been developed, b) the researchers have chosen different text genres; c) has expanded the number of institutions that host researchers as well as regions of the country bringing together research groups in the area. In view of this, ethnomathematics has proved to be an area where there is vitality, polysemy and sensitivity, but it lacks, among others, the establishment of a network of researchers and to strengthen research groups in some regions of the country.

Keywords: Scientific journals. BOLEMA. Ethnomathematics publications.

1 Professora da Universidade Federal de Mato Grosso (ICET/CUA/UFMT). Membro do GEPEm (Grupo de Estudos e Pesquisas em Etnomatemática/USP) e do GEPENI (Grupo de Estudos e Pesquisas em Etnomatemáticas Negras e Indígenas/UFMT). E-mail: wannara@ufmt.br

Introdução

No Brasil, a crescente preocupação com a formação profissional docente tem causado elevação no número de cursos de pós-graduação em Educação, dentre eles, os voltados para a Educação Matemática. Este fenômeno, por sua vez, tem influenciado no aumento da produção e da difusão de conhecimentos na área, inclusive porque o sistema de avaliação de programas de pós-graduação adotado pela CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) prioriza o número e a qualidade de publicações dos pesquisadores afiliados a esses programas. Afinal, como destacam Silva e Hayashi (2008), o fazer científico compõe um ciclo que percorre a geração de ideias, o desenvolvimento da pesquisa e a sua comunicação. Este ciclo inclui, portanto, atividades associadas com a produção, a disseminação e o uso das informações, desde o instante em que o/a cientista concebe a ideia para a sua pesquisa, até quando as informações de seu trabalho são aceitas como constituintes do conhecimento científico (SILVA e HAYASHI, 2008). Entretanto, as possibilidades para a constituição deste fluxo ocorrem a partir de dois principais instrumentos.

Com efeito, os congressos e os periódicos são os meios mais utilizados para a comunicação dos trabalhos científicos. Eles, ao reproduzirem as exigências próprias de um campo científico, conferem valor às pesquisas e as situam no seu grau de originalidade em relação ao conhecimento já acumulado em determinada área do conhecimento. Além disto, tais instâncias apontam a evolução de um campo de saber, legitimam novos referenciais teóricos e metodológicos e perpetuam a memória científica. Porém, em sua origem, os periódicos não tinham este status.

Segundo Stumpf (1996), as revistas científicas surgiram no século XVII "como uma evolução do sistema particular e privado de comunicação que era feito por meio de cartas entre os investigadores e das atas ou memórias das reuniões científicas" (p.1). Desde então, elas têm desempenhado importante papel no processo de comunicação científica. Contudo, assinala a autora, somente no século XIX, quando as revistas adquiriram as características atuais, elas passaram a ter credibilidade para, inclusive, substituir os livros monográficos, visto que, até então, os artigos eram considerados formas provisórias de comunicação. Atualmente, em que se pese a importância dos eventos científicos para a comunicação/discussão de resultados de pesquisas, temos que reconhecer, tal como Gruszynski e Golin (2006), que:

> o periódico científico assume o papel de principal veículo formal da comunicação científica. Ao espelhar pelo menos parte da produção mais representativa dos campos de estudo, as revistas são utilizadas como indicadores para avaliação de cursos de pós-graduação, concessão de bolsas, progressão funcional, entre outros. Atuam como índices nos sistemas de julgamento que configuram as estruturas institucionais de pesquisa e, conseqüentemente, dos mecanismos decisórios de poder e distribuição de verbas destinadas a ela. (GRUZYNSKY e GOLIN, 2006, p. 2/3)

Em decorrência disto, a publicação científica em periódicos possui um papel destacado no processo de compartilhamento, de debates, de validação e de transferência da informação técnico-científica e assume-se o pressuposto de que os artigos publicados em determinados periódicos reflitam os principais resultados de uma área de pesquisa. Eles, então, passariam a ser referência para outros estudos e, por isto, tais produções poderiam servir como indicadores do desempenho individual de um/a cientista ou de uma instituição, ou mesmo do desenvolvimento científico de uma área.

Na Educação Matemática brasileira, questões relativas à produção acadêmica têm sido foco de várias pesquisas (FIORENTINI, 1993), (GOMES e BRITO, 2009), (PASSOS, NARDI e ARRUDA, 2009), (MENEGHETTI, BATISTELA e BICUDO, 2011), dentre muitas outras. Investigações como estas são relevantes por servir de referência para estudiosos da área, pois se concebe que, à medida que o/a pesquisador/a se informa sobre as produções anteriores, engendra possibilidades para a constituição de resultados de pesquisa mais atuais e relevantes.

Foi a partir do reconhecimento desta importância que se originou a proposta de empreender uma análise de periódicos científicos que visam a divulgação de pesquisas em Educação Matemática, de modo a responder a questão: *"o quanto e como a Etnomatemática tem-se apresentado nos trabalhos publicados em periódicos nacionais de Educação Matemática?".*

Pode-se dizer que esta questão conduz a uma meta-análise que é:

> uma modalidade de pesquisa que objetiva desenvolver uma revisão sistemática de estudos já realizados em torno de um mesmo tema ou problema de pesquisa, fazendo uma análise crítica dos mesmos com o intuito de extrair deles, mediante contraste e inter-relacionamento, outros resultados e sínteses — dados ou pormenores não considerados pelos pesquisadores, em decorrência de seus objetos de investigação (PASSOS et al, 2006, p. 6)

De todo modo, metaforicamente, tenho chamado esta pesquisa de'um olhar no espelho'.

Como afirmou Charles de Bovelles:

> É da natureza do espelho perfeito possuir integridade, unidade, uniformidade, solidez, continuidade, transparência e sensibilidade à luz, de sorte que o olho, mantendo-se no exterior do espelho, absorva, esgote, contemple todas as formas que aí se encontram em ato. E para que se produza a visão perfeita, a intuição, é preciso que o olho esteja voltado e tendido para o espelho [...] e que nenhum corpo venha, com sua opacidade, isolar, separar, desunir o ato e a potência, o olho e o espelho. O melhor caso é aquele em que o olho, tão próximo do espelho, forme com ele uma só substância, um vínculo que nada possa separar (BOVELLES apud CHAUI, 1988, p. 50).

Mas, após a aproximação sugerida por Bovelles, a imagem que se tem no espelho é a do próprio olho e ela deixa de nos informar sobre os contornos que queremos observar. Então, não cabe exigir de um olhar no espelho tanta fidelidade, até porque ele não nos mostra o objeto real — posto que este perde dimensões, relevo, peso, etc. Além disto, o próprio olhar, a cada momento, fixa-se em diferentes ângulos, revelando outros detalhes acerca da imagem refletida. Assim, há que se compreender que a minha resposta à questão de pesquisa tenha algo de particular, pois reflete meu modo de ver. Outros/as pesquisadores/as que empreendessem um olhar para os mesmos artigos poderiam revelar outros ângulos, respostas outras para a mesma questão. Também, certamente, os resultados deste olhar seriam narrados de outra forma.

Minhas escolhas levaram à constituição deste texto no qual, inicialmente, são assinalados aspectos gerais relativos à questão das publicações na área de Educação Matemática e elucidada as razões pelas quais optei por um determinado periódico neste primeiro momento da pesquisa; metaforicamente, esta parte do artigo recebeu o nome de 'a escolha de um espelho'. No item seguinte, 'examinando o espelho', são explicitados os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa. As análises ocorrem em 'imagens no espelho'. Finalmente, em 'guardando o espelho', as conclusões da pesquisa são apresentadas.

A escolha de um espelho: sobre a publicação etnomatemática em periódicos da área

Na atualidade, contamos com um número razoável de periódicos nacionais dedicados à Educação Matemática. Dentre eles é possível citar: o Boletim GEPEM (publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da UFRuralRJ), o *BOLEMA* – Boletim de Educação Matemática (da UNESP de Rio Claro), a *Revista Caminhos da Educação Matemática* (publicada pelo GEPEM — Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática/ Instituto Federal de Sergipe), Educação Matemática em Revista -RS (SBEM-RS), *Em Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana* (da UFPE), a *Perspectivas da Educação Matemática* (uma produção do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFMS), a *REVEMAT — Revista Eletrônica de Educação Matemática* (da UFSC), a *Revista Educação Matemática Pesquisa* (do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP), *REMATEC. Revista de Matemática, Ensino e Cultura* (UFRN), RIPEM — Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (da SBEM), a *Zetetiké* (da UNICAMP) e, claro, com a *Revista Educação Matemática em Foco* (da Universidade Estadual da Paraíba).

Em face desta multiplicidade, há de se compreender que é difícil realizar uma análise exaustiva sobre os artigos de Etnomatemática publicados nos periódicos da área. A proposta é a de que, ao concluir a pesquisa, cinco desses periódicos tenham sido analisados. Neste momento estão concluídas as análises sobre o primeiro deles: o Bolema (Boletim de Educação Matemática), publicado pela Universidade Estadual de São Paulo – Campus de Rio Claro (UNESP/RC).

Algumas das justificativas para iniciar esta pesquisa pelo Bolema devem-se ao fato de que ele está vinculado ao primeiro programa de pós-graduação em Educação Matemática da América Latina (TASSINARI,1999). Entretanto, ultrapassando as fronteiras deste programa e reunindo a produção de vários deles, o periódico, que tem sido publicado regularmente nos últimos vinte e cinco anos, tornou-se uma referência ampla, diversificada e representativa da produção acadêmica brasileira em Educação Matemática. Além disto, o Bolema oferece versão eletrônica, o que permite seu acesso a um número maior de pesquisadores.

Neste sentido, Stumpf (1996) afirma que os periódicos científicos passaram por poucas modificações ao longo do século XIX e primeira metade do século XX, até que, a partir dos anos 70, os avanços da editoração eletrônica permitiram melhorar a qualidade e aumentar a rapidez na editoração das revistas. Entretanto, pontua Stumpf (1996), a grande mudança nos periódicos científicos só viria ocorrer na década de 90, com as revistas eletrônicas, seja por meio da utilização somente deste formato ou pela adoção do que Costa (1999) apud Costa

(2005, p. 1) explica ser um modelo híbrido: no qual há a coexistência dos meios impresso e eletrônico para a divulgação de um mesmo periódico. O Bolema adota o modelo híbrido, e foi de seu formato eletrônico que alguns dos artigos analisados foram extraídos.

Contudo, antes de explicitar os procedimentos adotados na pesquisa, cabe pontuar que minha proposta de investigação não contempla discussões acerca do que deve ou não ser entendido como Etnomatemática. Isto é, não tenho problematizado as definições ou pressupostos tomados pelos autores ao abordarem a Etnomatemática, compreendendo-a seja como programa de pesquisa e/ou como proposta pedagógica ou mesmo como postura filosófica. Volto-me, portanto, para a análise de artigos que estariam vinculados à Etnomatemática pelo fato de seus autores terem como objetivo:

a) Conhecer e compreender o ciclo de geração, de organização intelectual e social, e de difusão do conhecimento;
b) Ou investigar as raízes culturais das ideias matemáticas que ocorrem nos diferentes contextos, práticas e grupos sociais;
c) Ou estabelecer análises comparativas de fazeres e de saberes, da dinâmica cultural intrínseca a práticas tais como contar, medir, quantificar, classificar, explicar, inferir, localizar-se no tempo e espaço, dentre outras;
d) Ou denunciar relações simbólicas de poder que permeiam os processos de validação, de legitimação e de difusão do saber denominado como matemática;
e) Ou discutir as implicações pedagógicas de se assumir que a matemática - como campo de saber e/ou como disciplina curricular - tem-se constituído a partir de diferentes racionalidades, linguagens e gramáticas e também como efeito das relações de poder e de autoridade;
f) Ou defender a assunção de uma postura - na pesquisa e/ou na prática pedagógica - que se pauta pelo reconhecimento, pela aceitação e pela valorização da singularidade dos sujeitos e dos saberes, assim como das relações entre os sujeitos entre si e deles com o mundo, que levam à existência de diferentes estruturas de pensamentos, linguagens e práticas matemáticas;
g) Ou que apresentem reflexões sobre qualquer uma das vertentes acima citadas ou ainda sobre a própria conceituação, a evolução, a epistemologia e/ou as bases teóricas da Etnomatemática.

A aceitação de tal multiplicidade do que se compreende como sendo Etnomatemática é importante, pois há que se reconhecer que:

> O termo etnomatemática [como palavra que nomeia e que é nomeada] já tem caracterizado, de alguma forma, o que pode ou não ser relacionado a si mesma. Tem se constituído, como proposta acadêmica, em um discurso da educação Matemática com poder e grau de legitimidade (BELLO, 2000, 2006) para dizer, falar, explicitar, autorizar, olhar o que pode ou não ser reconhecido e valorizado como prática etnomatemática, como teoria etnomatemática, isto é, tem se permitido "trazer para si" um regime de verdade. (BELLO, 2008)

Em razão disto, neste trabalho, não existe uma tentativa de se discutir as perspectivas de Etnomatemática adotadas pelos diferentes autores. Com este estudo, ao responder a questão: "*o quanto e como a Etnomatemática tem-se apresentado nos trabalhos publicados em periódicos nacionais de Educação Matemática?",* procuro perceber e dar a conhecer alguns traços que tem caracterizado a presença de trabalhos sobre a Etnomatemática nas principais revistas de divulgação científica da área.

Examinando o espelho: sobre os procedimentos metodológicos

Para a primeira resposta parcial à questão de pesquisa, foram consideradas inicialmente todas as edições do Bolema publicadas desde a sua primeira edição anual, em 1985 (Bolema número 1), até a edição de dezembro de 2010 (Bolema número 37), que, juntas, disponibilizaram duzentos e setenta e sete artigos. Deste conjunto, foram excluídas as edições especiais e as temáticas e, em vista disto, o *corpus* ficou constituído de duzentos e dezessete artigos.

A partir daí, o procedimento de recolha dos dados consistiu inicialmente na leitura dos títulos dos artigos, assim como do nome dos seus autores – na busca por detectar possíveis vinculações desses trabalhos com a Etnomatemática. Em seguida foram lidos os resumos e as palavras-chave de cada um dos artigos destacados a partir do olhar inicial, de modo a confirmar – ou não – sua relação com a Etnomatemática. Esta primeira ação revelou que, no total, o Bolema, em suas edições regulares, publicou vinte e cinco trabalhos relacionados à Etnomatemática.

Na organização que precedeu as análises, os artigos foram separados em três blocos. Os artigos referentes aos primeiros dez anos do Bolema passaram a ser precedidos pelo símbolo I, os publicados nos dez anos seguintes, de II e, finalmente, os artigos referentes aos últimos cinco anos passaram a ser precedidos por III. Depois, cada uma das publicações dos três blocos foi numerada em ordem alfabética de autoria (considerando o primeiro autor, no caso de coautoria), de modo que o olhar 'interno' para cada um dos três conjuntos de artigos não obedeceu a uma ordem cronológica de publicação.

Identificados cada um dos artigos, foi respondida a questão: qual é origem, isto é, a afiliação institucional, dos autores dos artigos e a distribuição geográfica das suas instituições? Neste momento, por vezes, tornou-se necessária numa consulta complementar à Plataforma Lattes para verificar a participação dos autores em grupos de pesquisa.

Depois de concluído este primeiro olhar, os artigos foram lidos na íntegra para dar resposta às seguintes perguntas orientadoras: Que tema foi abordado, investigado ou problematizado? Qual era o objetivo do trabalho? Quais foram os procedimentos de pesquisa adotados? Qual é modalidade do texto? Que aspectos teóricos foram privilegiados? Quais foram os autores referidos?

Em alguns casos, as respostas às questões orientadoras não haviam sido explicitamente anunciadas no artigo, então optei por colocar respostas presumidas a partir da leitura do texto.

Imagens no espelho: a Etnomatemática no Bolema

Nos primeiros três números deste periódico, foram publicados oito artigos, nenhum deles vinculado à Etnomatemática. Nos dois números seguintes – 4 e 5 –, que totalizaram oito artigos, três eram sobre Etnomatemática. Antes de publicar o volume de número 6, em 1989, o Bolema editou o seu primeiro número especial, inteiramente dedicado à Etnomatemática e contendo três artigos (outros dois números especiais seriam publicados neste primeiro decênio). O Bolema de número 7 também continha um artigo da área. Então, de um total de cinquenta e dois artigos publicados nas edições regulares do Bolema de 1985 a 1995 - números 1 a 11 -, quatro foram de Etnomatemática, em média, 7,6%.2

Quadro 1 - Artigos e autores

Bolema/ Número	*Título do artigo*	Autor(es)
4	**Etnomatemática se ensina?*	D'AMBROSIO, U.
5	** O Homem também conhece o mundo de um ponto de vista matemático.*	BORBA, M. C.
	** De quantas maneiras é que se pode demonstrar o Teorema de Pitágoras*	GERDES, P
7	** Por uma teoria da Etnomatemática*	FERREIRA, E. S.

Um dos trabalhos publicados nos primeiros dez anos do Bolema deve-se a um ex-estudante da UNESP/RC que, na época, estava vinculado à PUC/RJ (Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro). Dois autores estavam vinculados à UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas), mas eram orientadores do Programa de Pós-Graduação da UNESP/RC. Além destes, um autor estrangeiro foi responsável por um dos trabalhos.

Os autores de I1 e I2 dispuseram-se a discutir e ampliar o conceito de Etnomatemática, lançando algumas ideias sobre seu impacto na sala de aula. No artigo que foi classificado como I3, o autor recorre a Thomas Kuhn para argumentar que, de acordo com as ideias deste pensador expressas em "A Estrutura das Revoluções Científicas", a Etnomatemática poderia ser classificada como um movimento e até mesmo uma filosofia. Em I4, o autor dedica-se a analisar elementos decorativos presentes em vários contextos culturais e históricos — desde Moçambique ao Brasil, passando pelo Egito Antigo — para discutir uma série de demonstrações para o chamado teorema de Pitágoras.

Verifica-se, pois, que neste momento histórico, a Etnomatemática mostrava-se como uma proposta em constituição e que os pesquisadores consideravam necessário, sobretudo, discutir acerca da sua conceituação e evolução. Os três textos dedicados a este tema eram ensaios que se amparavam, principalmente, nas próprias teorizações sobre a

2 Observe que não estão inclusos neste número os artigos publicados no volume especial, caso eles fossem inclusos, poder-se-ia dizer que, em média, neste período, mais de 11% dos artigos publicados no Bolema foram de Etnomatemática.

Etnomatemática, na Psicologia Cognitiva e na Antropologia. O quarto artigo era resultado de uma pesquisa qualitativa.

R. Ascher e M. Ascher, U. D'Ambrosio, E.S. Ferreira e D. Carraher, T. Carraher e Schliemann foram os autores mais citados neste período.

Mas após a publicação no número 7 do Bolema outro artigo da área só se faria presente na revista de número 16. Por sua vez, o Bolema 17 trouxe quatro artigos acerca da Etnomatemática, enquanto os números 19 e 20 apresentaram um artigo cada um. Os volumes 23, 24, 25 e 26 continham, em conjunto, seis artigos sobre o tema. Assim, dos noventa artigos presentes nos volumes regulares do Bolema entre os anos de 1996 e 2006 (números 12 a 26), foram publicados treze artigos sobre Etnomatemática. Em vista disto, em média, mais de 14% dos artigos publicados no segundo decênio do Bolema foram desta área.

Este número é considerável se observarmos, por exemplo, que, tomando-se a classificação dos Grupos de Trabalho (GTs) do SIPEM (Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática)[3], temos, na Educação Matemática, doze áreas. Note-se, contudo, que a própria Etnomatemática não constitui, por si, um GT deste fórum, visto que ela está abrigada no *GT 5 - História da Matemática e Cultura* — junto, portanto, com os grupos de pesquisadores de História da Matemática, História da Educação Matemática e com a História Oral da Matemática e da Educação Matemática.

O quadro abaixo apresenta, a cada um dos números do Bolema publicados neste período, o título do artigo publicado e quais foram seus autores.

Quadro 2- Artigos e autores

Bolema/ Número	*Título do artigo*	Autor(es)
16	** Educação Matemática, Exclusão Social e Política do Conhecimento*	KNIJNIK, G.
17	** Etnomatemática de uma Classe Profissional: Cirurgiões Cardiovasculares*	SCHOCKEY,T.L.
	** Educação Matemática e Contemporaneidade: Enfrentando Discursos Pós-modernos*	CLARETO, S.M.
	** Água e Óleo: Modelagem e Etnomatemática?*	SCANDIUSSI, P.P.
	** O Desenvolvimento de um registro matemático Maori*	BARTON, B.
19	** Matemática em Algumas Culturas da América do Sul: Uma Contribuição à Etnomatemática*	D'AMORE, B.
20	**Vinho e Queijo: Etnomatemática e Modelagem*	ROSA M. e OREY D. C.
23	** Códice Florentino y Pensamiento Matemático. Cultura Otomí em el Valle Del Mezquital*	PEDRAZA, E.B
	** Biblioteca Digital de Etnomatemática : acesso mundial a fontes em etnomatemática*	LANE, N. D.
24	**Armadilha da Mesmice em Educação Matemática*	D'AMBROSIO, U
25	** Educação Matemática, Multiculturalismo e Preconceitos: que homem é tomado como medida de todos os outros?*	COSTA, W. N. G. e DOMINGUES, K. C. M.
26	** Abordagens Atuais do Programa Etnomatemática: delineando um caminho para a ação pedagógica*	ROSA, M. e OREY, D. C.
	** La Etnomatemática en Colombia: un programa en construcción*	ALVAREZ, H. B.

Oito dos trabalhos acima citados foram escritos por pesquisadores vinculados a instituições estrangeiras[4] sendo que dois deles foram escritos originalmente em português e dois foram mantidos no idioma original do autor. A tradução da maioria[5] dos outros trabalhos está comprovadamente relacionada a pesquisadores que, na época, eram estudantes vinculados ao Programa de Pós-Graduação da UNESP de Rio Claro. A tradução de um deles foi decorrente do trabalho de uma professora da USP (Universidade de São Paulo).

Uma pesquisadora que na época era estudante da pós-graduação na UNESP/RC foi autora de um dos trabalhos. Outras duas estudantes de pós-graduação, vinculadas à USP e ao GEPEm (Grupo de Estudos e Pesquisas em Etnomatemática/USP), escreveram outro artigo; uma delas se declarou também vinculada à Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT). Um dos autores de outro texto declarou-se docente na UNESP/RC e outro artigo estava vinculado à Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS/RS).

Observa-se que, dos treze trabalhos, seis estavam relacionados, de uma forma ou de outra, ao próprio programa de Pós-Graduação da UNESP/RC — que, como foi anteriormente citado, foi o primeiro, na América Latina, dedicado à Educação Matemática. Entretanto, a predominância observada pode estar relacionada não só à antiguidade do Programa, mas também à própria evolução do periódico que, ao longo do tempo, foi deixando de ser circunscrito ao programa que lhe deu origem. Outras três instituições também mantinham vínculo com os autores dos artigos publicados pelo Bolema neste período.

3 O SIPEM é uma reunião de pesquisadores brasileiros e estrangeiros realizada pela SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) e que se propõe a promover o intercâmbio entre os grupos que, em diferentes países, se dedicam a pesquisas na área de Educação Matemática; divulgar as pesquisas brasileiras no âmbito da Educação Matemática; promover o encontro dos pesquisadores em Educação Matemática, proporcionando-lhes a possibilidade de conhecer as investigações que estão sendo realizadas por eles neste momento; propiciar a formação de grupos integrados de pesquisas que congreguem pesquisadores brasileiros e estrangeiros e possibilitar o avanço das pesquisas em Educação Matemática.

4 Foi observado que um dos pesquisadores, coautor de dois trabalhos, modificou a sua vinculação, de modo que se num primeiro momento estava vinculado a uma instituição dos EEUU, num segundo artigo, identificou-se como professor visitante da UFOP. Entretanto, o primeiro autor dos dois trabalhos, apesar de ser brasileiro, era, à época, vinculado a instituições daquele país. Em vista disto, ambos os trabalhos de M.Rosa e D.C. Orey publicados pelo Bolema neste segundo período foram classificados como de responsabilidade de autores estrangeiros.

5 A tradutora de um dos trabalhos não informou a sua vinculação institucional.

De todo modo, cabe notar que os autores brasileiros dos trabalhos publicados nos primeiros vinte anos do Bolema estavam vinculados a apenas seis instituições. Somente as autoras de um dos artigos, em suas identificações, se declararam vinculadas a um grupo de pesquisa, o que não significa que os autores dos outros artigos também não participassem de grupos deste tipo. Observemos ainda que apenas um dos trabalhos nacionais não teve origem na Região Sudeste, mas sim na Região Sul.

Quanto aos temas foco dos trabalhos, quatro artigos escritos nesta época tiveram como principal proposta discutir a conceituação, a evolução e/ou as bases teóricas da Etnomatemática (II.3, II.11, II.12). Investigar as raízes culturais das ideias matemáticas que ocorrem em contextos, práticas e grupos sociais específicos foi uma preocupação detectada nos trabalhos II.1, II.2 e II.13. No artigo II.4, as autoras discutiram o papel das pesquisas etnomatemáticas frente ao multiculturalismo e os preconceitos culturais e étnico-raciais. A preocupação manifestada por II.5 foi em relação ao currículo e à formação de professores. O autor de II.6 ocupou-se em fazer análises comparativas de ideias matemáticas presentes em diferentes culturas.

Por sua vez, o artigo II.7 foi desenvolvido para denunciar relações simbólicas de poder que permeiam os processos de validação, de legitimação e de difusão do saber denominado como matemática. O artigo II.8 tinha como meta relatar o processo de constituição de um acervo de trabalhos internacionais sobre Etnomatemática e apresentar informações sobre o uso do referido banco de dados. Em II.10, o objetivo foi apresentar as abordagens atuais para o programa em Etnomatemática e delinear uma proposta pedagógica.

Cabe pontuar que as respostas à quinta questão orientadora — que indagava acerca dos referenciais teóricos — deram a perceber que a maior parte dos artigos dos autores estrangeiros (II.1, II.6, II.8 e II.9) não trouxe contribuições teóricas relevantes para a área, exceção feita aos artigos II.10 e II.11 — ambos de mesma autoria. Entretanto, trazer alguma contribuição teórica para a área foi uma preocupação presente em todos os artigos publicados por pesquisadores brasileiros no Bolema neste período.

Foi possível observar ainda que os autores mais referidos, com citação em pelo menos dois trabalhos, foram: U. D'Ambrosio, M. Ascher, E.S Ferreira, De Certau, T. Carraher, G.B.Saxe, P. Gerdes, M. Borba, B.S Santos, G. Knijnik, B. Barton, A. Bishop, e T.T. Silva. Percebe-se ainda que os pesquisadores, ao longo dos artigos publicados no Bolema, dialogaram com referenciais teóricos advindos de diferentes áreas, sendo que, além dos estudos internos à própria área, destacaram-se os de origem na Psicologia, Sociologia e Antropologia.

Apresento, no quadro a seguir, o que foi observado quanto aos objetivos traçados e sobre a abordagem metodológica escolhida nos trabalhos publicados entre 1996 e 2006.

Artigo	Objetivo e abordagem metodológica
II.1	A pesquisa visou coletar dados sobre a história da etnomatemática colombiana, caracterizar as diferentes maneiras de abordar esses estudos naquele país e apresentar distintas universidades, grupos de investigação e redes que atualmente realizam estudos e investigações em Etnomatemática. O autor, por meio de uma pesquisa bibliográfica, fez uma incursão histórica à Etnomatemática, destacando trabalhos da área e propondo uma categorização para eles.
II.2	Neste trabalho, os autores procuram demonstrar a possibilidade da utilização harmoniosa do programa etnomatemática e da modelagem na educação matemática para o ensino-aprendizagem em matemática. Para tanto, recorrem a exemplos de como povos de diferentes culturas criaram modelos matemáticos de acordo com suas necessidades cotidianas.
II.3	A intenção foi discutir, sob o ponto de vista da Etnomatemática, as implicações de um quadro de ideias e conceitos que pudessem caracterizar o momento de crises política, ideológica e epistemológica que, segundo a autora, estaríamos vivendo. Para tanto, ampara-se numa investigação bibliográfica que se pautou, principalmente, em pesquisadores da Etnomatemática e em autores pós-modernos.
II.4	Discutir o papel da ciência e, mais especificamente, das pesquisas etnomatemáticas frente ao multiculturalismo e os preconceitos culturais e étnico-raciais foi o objetivo deste trabalho. Para tanto, as autoras recorreram à história da ciência e a pesquisas bibliográficas sobre multiculturalismo e etnomatemáticas indígenas.
II.5	O autor discorre sobre o papel da matemática na sociedade moderna em face ao desenvolvimento científico e tecnológico que vivenciamos, destacando que é necessário preparar as novas gerações para viverem um novo sistema de valores. Seus argumentos são tecidos a partir de pesquisas bibliográficas voltadas, principalmente, para a formação de professores e o currículo.
II.6	O texto nos informa sobre os saberes matemáticos de alguns grupos étnicos. O autor, que se declara pesquisador em Matemática e curioso em Etnomatemática, descreve experiências de sua vida e suas impressões sobre elas, em especial, narra momentos em que tomou contato com saberes matemáticos dos Quéchuas (indígenas do Equador).
II.7	O artigo discute o campo da Educação Matemática nas suas relações com o cultural, o social e o político. Inicialmente, estudos bibliográficos são utilizados para enfatizar os efeitos de exclusão escolar causados por processos sociais conectados à Educação e por processos que tornam "naturalizadas" e invisíveis as relações de poder que fazem com que determinados conteúdos sejam aqueles considerados legítimos para integrarem o currículo escolar na área da Matemática. Na parte final do artigo, a autora apresenta a análise de um episódio coletado por ela em pesquisa realizada em um assentamento do Movimento Sem Terra do sul do País.
II.8	A meta era informar sobre a Biblioteca Digital de Etnomatemática (BDE). Em vista disto, foi relatado o processo de constituição de um acervo de trabalhos internacionais sobre Etnomatemática, notadamente de pesquisas voltadas para culturas do Pacífico. A seguir foram apresentadas informações sobre o uso do referido banco de dados.
II.9	O trabalho visou proporcionar ao professor a oportunidade de comunicar, sugerir e adaptar o conhecimento da cultura Otomí (México) aproximando-a das propostas do Plano e Programa de Educação Básica. A pesquisa pautou-se pelas observações e entrevistas junto a detentores da cultura Otomí que permitiram ao autor detectar elementos simbólicos das noções de tempo, espaço e número presentes em atividades como bordar e semear, dentre outras. Em seguida, as situações foram utilizadas para exemplificar o que propõem os documentos orientadores para a Educação Básica mexicana.

II.10	Neste artigo, os autores expressam o ponto de vista de que é difícil enxergar a etnomatemática desvinculada da modelagem, pois, segundo eles, por meio da modelagem matemática, a etnomatemática e a matemática acadêmica se confundem. Utilizam pesquisas bibliográficas para amparar seus argumentos e sugerir que a exploração da relação entre Etnomatemática e Modelagem é útil para que se possa elaborar intervenções pedagógicas para o ensino-aprendizagem em matemática, designadas especificamente para um determinado grupo cultural.
II.11	Com o objetivo de apresentar as abordagens atuais para o programa em Etnomatemática e delinear uma proposta pedagógica, os autores fazem uso da pesquisa bibliográfica para argumentar sobre a possibilidade de se desenvolver uma proposta curricular baseada no trivium literacia, materacia e tecnocracia.

Observada a forma como a Etnomatemática esteve presente no Bolema entre os anos de 1985 a 2005, analisemos o período mais recente.

Do número 27 (2006) até o número 37 (2010), foram publicados oito artigos sobre Etnomatemática, de um total de cento e vinte. Entretanto, há que se considerar que algumas das edições deste período eram temáticas - "Frações" (número 31, de 2008 – com 10 artigos), "Avaliação e Educação Matemática" (número 33, de 2009 – 9 artigos), "História da Educação Matemática" (número 35 a e 35b, de 2010 – totalizando 24 artigos). Excluindo os artigos referentes às edições temáticas, temos um total de setenta e sete trabalhos publicados neste período, dos quais, oito artigos são de Etnomatemática, isto significa que as publicações relacionadas a esta área superaram os 10%. Vejamos, a seguir, quais foram estes artigos.

Bolema/ Número	***Título do artigo***	**Autor(es)**
30	** Análisis a una Figura Tradicional de las Mochilas Arhuacas:Comunidad Indígena Arhuaca. Sierra Nevada de Santa Marta, Colombia*	ARAÚJO, A. A.
32	** Práticas Sociais de Localização e Mapeamento: uma discussão curricular sobre o conceito de escala*	LIMA, M. J. e MONTEIRO, A
	** Do Labor aos Mitos: uma nova linha no mapa das pesquisas em Etnomatemática*	COSTA, W. N. G.
34	** "Antes de dividir temos que somar": 'entre-vistando' foregrounds de estudantes indígenas*	SKOVSMOSE, O. et al
	** A Formação de Professores e suas Relações com Cultura e Sociedade: a educação escolar indígena no centro das atenções*	RODRIGUES, M., FERREIRA, R. e DOMITE, M. C. S.
36	** O Estudo da Realidade como Eixo da Formação Matemática dos Professores de Comunidades Rurais*	MENDES, I. A.
37	** Entrelaçamentos e Dispersões de Enunciados no Discurso da Educação Matemática Escolar: um Estudo sobrea Importância de Trazer a "Realidade" do Aluno para as Aulas de Matemática*	KNIJNIK, G. e DUARTE C. G.
	** Pedagogia Etnomatemática: do "par de cinco" às concepções do sistema de numeração decimal*	BANDEIRA, F. A. e MOREY, B.

Das oito publicações etnomatemáticas que ocorreram nos cinco últimos anos (Bolema 27 a 37), um artigo foi publicado em espanhol, por pesquisador colombiano. Um artigo originalmente escrito em inglês, uma coautoria de pesquisadores brasileiros e dinamarqueses, foi traduzido para o português por professor e estudantes vinculados à Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro. Os seis artigos restantes foram escritos em português por pesquisadores brasileiros.

Dentre os artigos escritos apenas por brasileiros, dois trabalhos estão relacionados à UFRN (Universidade Federal do Rio Grande do Norte) por terem sido publicados por professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Uma pesquisa ao diretório de grupos de pesquisa do CNPq revelou que o autor de um dos trabalhos e a segunda autora do outro são membros do grupo de pesquisa *Matemática e Cultura*, desta instituição.

Vinculados à USP, tendo como autores docente ou estudantes da instituição, foram encontrados dois artigos – cujos autores se identificaram como membros do *Grupo de Estudos e Pesquisas em Etnomatemática* – o GEPEm/USP. Contudo, tais artigos também estavam vinculados a outras instituições — UFMT (Universidade Federal de Mato Grosso), UFG (Universidade Federal de Goiás) e Escola Indígena Tengatui Marangatu/MS —, visto que, tendo a USP como local de estudos, os autores ou coautores dos artigos trabalhavam nessas instituições.

Foi detectado ainda um trabalho de pesquisadoras vinculadas à UNISINOS e ao *Grupo Interinstitucional de Pesquisa em Educação Matemática e Sociedade* (como informa o diretório de grupos de pesquisa do CNPq). A segunda autora deste trabalho estava, à época, vinculada também a duas a instituições particulares.

Outro trabalho está vinculado à USF (Universidade de São Francisco – SP) e à UNEMAT (Universidade Estadual de Mato Grosso), uma das coautoras deste trabalho também é integrante do GEPEm/USP .

Deste modo, nos trabalhos dos pesquisadores brasileiros, estão representadas dez instituições, seis estados da federação, quatro regiões do País e três grupos de pesquisa, situados nas regiões Nordeste, Sudeste e Sul. Note-se que os pesquisadores da Região Centro-Oeste declararam-se vinculados a um grupo de pesquisa da Região Sudeste.

Portanto, não foram encontrados, entre os artigos publicados nas edições regulares do Bolema ao longo dos seus vinte e cinco anos, autores que, de alguma forma — seja como local de trabalho ou de estudo — estejam relacionados à região Norte do País. Entretanto, quando observadas as referências dos artigos publicados nos últimos cinco anos, observa-se que existem, também nesta região, importantes trabalhos em Etnomatemática. As referências a autores da região Norte, estão, na maioria das ocasiões, atreladas a anais de eventos científicos. Este fato leva a inferir que talvez inexista, por parte dos pesquisadores do norte do País, uma política de publicação dos resultados de suas pesquisas em periódicos da área e eles têm preferido outras formas de comunicação científica.

Agrupando os artigos segundo as convergências temáticas, podemos perceber que dois artigos (III.6 e III.7) tratam de formação de professores, outros três abordam a ação pedagógica, sala de aula e currículo (III.2 e III.5). As ideias matemáticas presentes em prática sociais de diferentes grupos, em contextos específicos, foi tema do artigo III.1. Um artigo (III.3) problematizou caminhos e perspectivas da Etnomatemática enquanto programa de pesquisa. A análise de significados relacionados à Etnomatemática foi tematizada por outros dois trabalhos (III.4 e III.8).

Apesar das convergências temáticas, a resposta à segunda questão orientadora "qual era o objetivo do trabalho?" revelou a existência de uma grande diversidade quanto aos objetivos dos artigos analisados. O mesmo ocorreu quanto à questão orientadora complementar —"qual foi o delineamento da pesquisa?"—, como podemos observar no quadro abaixo.

Artigo	Objetivo e abordagem metodológica
III.1	Mostrar a análise de figuras tradicionais presentes em mochilas/cestos confeccionadas por mulheres arhuacas (da Colômbia) era o objetivo deste texto. A pesquisa qualitativa de orientação etnográfica pautou-se pelo uso de entrevistas junto a mulheres indígenas arhuacas habitantes de Serra Nevada de Santa Marta, no norte da Colômbia. Em seguida, o autor efetuou uma análise geométrica dos cestos.
III.2	O objetivo do trabalho era mostrar as possibilidades de se ensinar matemática no nível fundamental levando o aluno a compreender os princípios do sistema de numeração decimal, essenciais à compreensão dos procedimentos utilizados nas operações fundamentais, utilizando, para isto, o conhecimento tradicional de sua comunidade. As observações foram o principal instrumento da pesquisa qualitativa que ocorreu junto a estudantes de 5ª série do Ensino Fundamental da escola de uma comunidade de horticultores.
III.3	O artigo teve como meta dar a conhecer a perspectiva de pesquisa em Etnomatemática relacionada à análise dos mitos fundantes. Após uma meta-análise, a autora recorre à pesquisa qualitativa sobre mitos dos índios A'uwe-xavante para efetuar análises comparativas entre a etnomatemática deste povo e as etnomatemáticas grega (apolínea) e ocidental (faustiana).
III.4	Neste trabalho, buscou-se problematizar o enunciado que diz da importância de trazer a "realidade" do aluno para as salas de aula. A partir deste objetivo e utilizando a noção de *discurso*, as autoras dedicaram-se à análise dos anais de congressos brasileiros de Etnomatemática e dos três últimos Encontros Nacionais de Educação Matemática.
III.5	Discutir as possibilidades de articulação entre os saberes matemáticos construídos nas práticas sociais e os saberes matemáticos escolares no contexto da Educação de Jovens e Adultos foi o objetivo deste trabalho. Para tanto, as autoras recorrem aos resultados de uma pesquisa de campo realizado no Acampamento Santa Maria, em Nova Xavantina, no Mato Grosso. Como sujeitos da pesquisa foram considerados dois grupos: as agentes comunitárias de saúde e um conjunto constituído pelos primeiros moradores do assentamento.
III.6	A partir do objetivo de discutir a implementação do ensino de matemática nas áreas de assentamentos rurais, o autor remete à experiência pedagógica vivida em duas disciplinas do curso de Pedagogia da Terra, ocorrido na cidade de Ceará Mirim/RN. Na ocasião, foram auscultados professores-alunos moradores de assentamentos rurais das regiões Norte e Nordeste do País.
III.7	O objetivo do trabalho era expor atualidades sobre a formação de professores indígenas. Para tanto, os autores — um índio guarani e dois não índios envolvidos com a educação escolar indígena — empreendem um 'diálogo intercultural' por meio do qual emergem experiências, reflexões e concepções acerca do tema.
III.8	O fito era discutir diferentes significados atribuídos à Educação Matemática em situações particulares. Então, os autores problematizaram trechos de 'entre-vistas' com estudantes indígenas da aldeia Kopenoty, de uma reserva indígena próxima à cidade de Bauru/SP.

Foi observado que, na condução dos trabalhos, os autores fizeram uso de diversas modalidades textuais: textos dissertativos (III.1, III.2, III.4, III.5, III.7 e III.8), ensaio (III.3), relato de experiência (III.6) e diálogo argumentativo (III.7).

Quanto às contribuições teóricas, deparei-me com: a) reflexões sobre as concepções d'ambrosianas de Etnomatemática (III.2); a utilização conjunta de Estudos do Imaginário, da História e da Filosofia– notadamente a partir de Durand, Spengler e Foucault (III.3); o diálogo com as teorias do segundo Wittenstein e de Foucaut (III.4); a utilização da Etomatemática em confluência com as teorias curriculares críticas – referenciadas em T.T. Silva e B.S.Santos (III.5); discussões sobre os impactos das teorizações de Paulo Freire sobre a escuta e o diálogo (III.7); reflexões sobre os conceitos de *background, foreground* e dos significados na Etnomatemática (III.8).

Quanto aos autores tomados como referência pelo maior número de trabalhos, destaca-se D'Ambrosio — que foi citado em sete dos oito artigos publicados pelo Bolema neste período. O segundo autor mais citado foi Kniknik, mencionada em cinco artigos. Apesar de ambos serem autores nacionais, não foi detectada uma tendência endógena nas referências, pois, por exemplo, A. Bishop. B.Barton, B.S. Santos, P. Gerdes, M. Foucault e O. Skovsmose foram citados em pelo menos dois trabalhos e vários outros autores de outros países também foram tomados como interlocutores em diferentes artigos.

Foi observado ainda que tem sido uma constante a referência não só a artigos publicados em periódicos, mas também a livros publicados por autores estrangeiros e brasileiros. No caso das teses e dissertações a maioria dos trabalhos citados foi desenvolvida no próprio País.

Guardando o espelho: considerações finais

O olhar para a Etnomatemática que se mostra no Bolema colocou-me frente a produções com origem em múltiplos contextos, com significados diversos, que se revelam em textos multifacetados. Textos que remetem a saberes diversificados, gramáticas variadas, diferentes racionalidades, significados múltiplos. Remetem a continuidades, a descontinuidades, a saberes e a relacionamentos que são criados e recriados a partir de diversos arranjos entre o local e o global. Tudo isto, de certo modo, confirma que a diversidade é uma marca desta área e permite chegar a algumas conclusões:

a) Os pesquisadores têm voltado sua atenção para temas diversos e, em face disto, muitas informações empíricas foram disponibilizadas e referenciais teóricos consideráveis foram desenvolvidos;

b) Quanto aos grupos foco de interesse nas pesquisas, foram citados diferentes grupos de profissionais, de povos indígenas, de estudantes e professores que atuam em contextos específicos, de trabalhadores assentados ou sem terra, dentre outros.

c) Em seus artigos, os pesquisadores têm optado por diferentes gêneros textuais, tais como ensaios, textos dissertativos, relatos de experiência e diálogos argumentativos;

d) Tem-se ampliado o número de instituições que abrigam pesquisadores da área, assim como de regiões do País que congregam grupos de pesquisadores em Etnomatemática.

Entretanto, vislumbra-se a necessidade de instalação e/ou de fortalecimento dos grupos de pesquisa — notadamente nas regiões Norte e Centro-Oeste. Neste sentido, talvez seja interessante/importante gerar uma rede virtual que permita aos pesquisadores dos diferentes grupos e regiões divulgar e discutir trabalhos, atualizar informações, dentre outros;

e) Ao longo dos vinte e cinco anos do Bolema, Ubiratan D'Ambrosio tem sido uma referência inestimável para os pesquisadores na área, notadamente por meio de seus livros. Mas os pesquisadores etnomatemáticos brasileiros também usam, em grande proporção, periódicos, teses e dissertações como fontes de referência para a construção do quadro teórico-metodológico de suas análises e investigações científicas. Muitas dessas publicações são nacionais, mas, ainda assim, o quadro não revela tendências endógenas, visto que não há relevante desproporcionalidade no número de autores nacionais ou internacionais referenciados;

f) Em geral, os artigos de etnomatemáticos brasileiros publicados pelo Bolema trouxeram discussões teóricas mais amplas do que dos autores estrangeiros;

g) Ainda no que se refere aos aspectos teóricos, é possível destacar que, talvez pela própria natureza da Etnomatemática – área multifacetada, atravessada por dimensões culturais, históricas, sociais, linguísticas e outras –, a maioria dos artigos, além de trazer contribuições teóricas 'internas' para circunstanciar e sustentar o trabalho, fazem incursões em outros campos. Contudo, não foi detectada uma tendência de uso de publicações advindas da Etnofísica, Etno-astronomia, Etnomúsica,... Isto me leva a formular a sugestão de que a Etnomatemática deva exercitar uma interlocução mais ativa com estas áreas, a fim de fertilizar sua prática científica e pedagógica.

Mas, talvez, uma das principais conclusões a que possamos chegar é que a Etnomatemática tem-se apresentado, no Bolema, como uma área que tem vitalidade, polissemia e sensibilidade. Possivelmente, o próximo olhar para o espelho, isto é, a análise de outro periódico, poderá nos apontar outros fatores importantes que levem a um maior conhecimento sobre os caminhos que os pesquisadores da área têm trilhado e sobre os desafios a serem enfrentados.

Entretanto, por hora, deixarei o espelho aos cuidados de Oxum — que na religião yoruba é uma orixá ligada aos rios, à fertilidade, à gestação, à vida, à beleza, à diplomacia e à riqueza — que tem por símbolo o espelho. Que ela guarde o espelho aqui utilizado, na esperança de que no nosso próximo olhar para ele, isto é, para as publicações etnomatemáticas nos periódicos nacionais, as imagens refletidas tragam também vestígios da cultura, dos fazeres e dos saberes de seus filhos afro-brasileiros.

Referências

BELLO, Samuel E. L. Etnomatemática: um outro olhar, mais uma possibilidade. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ETNOMATEMÁTICA, 3, 2008, Niterói. *Anais do Terceiro Encontro Brasileiro de Etnomatemática*. Niterói: Universidade Federal Fluminense, 2008. 1 CD-ROOM

CHAUI, M. Janela da alma, espelho do mundo. In: NOVAES, A. *O Olhar*. São Paulo: Companhia das Letras, 1988. p. 31-67.

COSTA, S. M. S. O novo papel das tecnologias digitais na comunicação científica. In: UFBA; IBICT. (Org.). Bibliotecas Digitais. Salvador, BA ; Brasília, DF: UFBA; IBICT, 2005, v. 1, p. 165-183. Disponível em http://repositorio.bce.unb.br/handle/10482/1437 acessado em setembro de 2011.

FIORENTINI, D. Memória e analise da pesquisa acadêmica em educação matemática no Brasil: o banco de teses do CEMPEM/FE-UNICAMP. *Zetetike* (UNICAMP), v. 1, n. 1, p. 55-94, 1993.

GOMES, M. L. M.; BRITO, A. J. . Vertentes da produção acadêmica brasileira em história da educação matemática: as indicações do EBRAPEM. *Bolema.* Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 22, p. 105-130, 2009.

GRUSZYNSKI, A. C; GOLIN, C. Periódicos científicos: transição dos suportes impresso para o eletrônico e eficácia comunicacional. *UNIrevista* (UNISINOS. On line), v. 1, p. 1-13, jul. 2006. Disponível em http://www.alaic.net/ponencias/UNIrev_GruszynskiGolin.pdf. Acessado em setembro de 2011.

MENEGHETTI, R.C.G; BATISTELA, R.F;BICUDO, M.A.V. A pesquisa sobre o ensino de Probabilidade e Estatística no Brasil: um exercício de metacompreensão. *Bolema.* Boletim de Educação Matemática (UNESP/RC. Impresso). v.21, n.40, p.811-833, 2011.

PASSOS, C. L. B. ; NACARATO, A. M. ; FIORENTINI, D. ; MISKULIM, R. G. S. ; GRANDO, R. C. ; FREITAS, M. T. M. ; GAMA, R. P ; MEGID, M. A. B. A, ; MELO, M. V . Desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática: uma meta-análise dos estudos brasileiros. *Quadrante* (Lisboa), v. 15, n. 1 e 2 , p. 193-219, 2006. Disponível em http://www.apm.pt/files/_09_lq_47fe12e32858f.pdf. Acessado em setembro de 2011.

PASSOS, M. M. ; NARDI, R. ; ARRUDA, S. de M. A formação do professor e seus sentidos em 23 anos do Bolema: 1985-2007. *Bolema.* Boletim de Educação Matemática (UNESP/RC. Impresso), v. 34, p. 209-236, 2009.

SILVA, R. C.; HAYASHI, M. C. P. I. Revista Educação Especial: um estudo bibliométrico da produção científica no campo da Educação Especial. *Revista "Educação Especial"* n. 31, p. 117-136, 2008, Santa Maria. Disponível em: http://www.ufsm.br/ce/revista. Acesso em setembro de 2011.

STUMPF, I. R. C. Passado e Futuro das Revistas Científicas. *Ciência da Informação*, Brasília, v. 25, n. 3, p. 383-386, 1996.

TASSINARI, E.C. *A voz do passado e a memória dos homens:* um estudo sobre os periódicos (1974-1979) antecedentes ao e do Bolema – Boletim de Educação Matemática da Pós-graduação em Educação Matemática, do IGCE da Unesp, Campus de Rio Claro, São Paulo, Brasil. 1999. 338f. Dissertação (Mestrado em Educação, Arte e História da Cultura). Universidade Mackenzie, São Paulo, 1999.

Acertando o passo do movimento entre etnomatemática, formação de professores e aprendizagem da matemática: pré-requisito dos alunos e escuta dos professores em discussão

Maria do Carmo Santos Domite[1]

Resumo

Este trabalho pretende tornar possível uma aproximação entre etnomatemática e os processos de aprendizagem da matemática no contexto escolar - no entanto, ele espera encaminhar tal proposta de um ponto de vista dos estudos etnomathemáticos, não daqueles da psicologia cognitiva. Estaremos para tanto, focalizando duas noções dos processos da educação e da educação matemática: a noção compreendida por “pré-requisito” do aluno e a da “escuta” do professor. Estamos colocando no centro das discussões – no que se refere à prática pedagógica e a pesquisa - que o professor saiba compreender os conhecimentos matemáticos iniciais do aluno, assim como saiba escutar o que os alunos têm a dizer, respeitando-os em termos das diferenças culturais de modo a auxiliá-los a construir um pensamento mais crítico e elaborado das idéias matemáticas.

Palavras chave: etnomatemática, formação de professores, conhecimento primeiro, contexto não escolar, diversidade cultural.

Abstract

This paper attempts to make possible an approach between ethnomathematics and the mathematics learning processes in the scholar context – however it does this from an ethnomathematician´s point of view, not that of a Cognitive Psychology studious. We are therefore going to focus on two notions of the mathematics education processes: the notion understood as the student’s “prerequisite” and the notion of the teacher’s “listening”. We hope to bring to the centre of discussion that the teacher should know to understand the students´ initial mathematics knowledge, as well as know how to listen to what the students have to say – respecting the cultural and social differences in order to help them build a more critical and elaborate thinking about mathematics ideas.

Key words: ethnomathematics, teacher education, first knowledge, non-school context, cultural diversity.

1 Professora do Departamento de Metodologia de Ensino da Matemática na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

A etnomatemática, enquanto palavra no mundo contemporâneo, enfatiza a abordagem das convergências da sua postura e das mais promissoras correntes atuais de pensamento crítico e transdisciplinar, nomeadamente: a sociolingüística, a lingüística cognitiva, a fenomenologia, a biologia do conhecimento, a semiótica, a simbologia, o paradigma holístico e o da complexidade. (Vergani, 2003)

Vergani, há muito envolvida nos estudos etnomatemáticos ressalta que a etnomatemática, enquanto uma área de estudos do mundo contemporâneo, enfatiza a abordagem das correntes mais promissoras do pensamento atual crítico e transdisciplinar, como a sociolingüística, a lingüística cognitiva, a fenomenologia, a biologia do conhecimento, a semiótica, a simbologia, o paradigma holístico e o da complexidade (Vergani, 2003, p.127).

Concordamos com Vergani, acrescentando que o reconhecimento da Etnomatemática – como elo e como suporte das correntes atuais do pensamento crítico-holístico - significa muito para a educação matemática tanto em termos de apreensão histórica do conhecimento como de instrumental teórico-prático-político para outros movimentos nesta perspectiva. De algum modo, o reconhecimento da etnomatemática enquanto um programa de estudos é uma condição para poder explicitar pontos críticos no âmbito da educação matemática e da educação em geral, assim como é por meio dela que hoje muitos de nós conseguimos espaço para exercer a luta contra a superioridade das disciplinas formais – que, assumindo o caráter de conhecimento, excluem o resto - os que não participam do âmbito (acadêmico) formal.

A etnomatemática é, de fato, uma conquista que tem nos seus primórdios o esforço de educadores como S. Merllin-Olsen, U. D'Ambrosio, P. Gerdes, A. Bishop, M. D' Olne Campos, E. Sebastiani-Ferreira, M. Frankstein, A. Powell, B.. Barton, G. Knijnik entre outros, ao mostrar, como bem destaca D'Ambrosio, que uma das maiores distorções históricas tem sido a de identificar a matemática somente com o pensamento europeu, em particular nas suas origens, com o pensamento grego. Em outras palavras, estes educadores têm se dedicado a discutir e construir bases epistemológicas para evidenciar que há outros modos de explicar e entender as relações quantitativas e espaciais - há outras matemáticas, em outros contextos.

E agora, depois deste início em prol da etnomatemática, uma coisa ao menos deve ser sublinhada. É verdade que, para muitos educadores, a etnomatemática é um dos caminhos da educação matemática cuja produção de conhecimento tem características pertinentes e promissoras dentro das correntes mais atuais do pensamento crítico-holístico; no entanto, do mesmo modo que tem sido natural reconhecer tal potencial no âmbito filosófico-político, tem sido consenso, entre os educadores envolvidos nestes estudos, que tomar a etnomatemática como um caminho/método para a educação escolar é uma proposta de alta complexidade.

De fato, a etnomatemática tem sido, por um lado, muito bem sucedida ao desenvolver-se em educação como um modo de explicitar/legitimar as relações quantitativas e espaciais implícitas no saber-fazer de um grupo, de modo a revelar – da técnica ao significado - as diferenças, de um grupo social/étnico para outro, no que se refere às relações matemáticas[2]. De outro lado, mesmo que para D'Ambrósio (1990), a grande preocupação do ponto de vista da educação, assim como o passo essencial para a difusão da etnomatemática está em levá-la para a sala de aula, é possível afirmar que ainda está engatinhando o movimento no sentido da etnomatemática como prática pedagógica. E por quê? O que se passa na dinâmica de operacionalização do âmbito escolar que possa dificultar a incorporação dos propósitos da etnomatemática?

Uma primeira tentativa de resposta à pergunta pode estar no fato de que no âmbito da educação (matemática) escolar, alguns educadores parecem indiferentes à influência da cultura para a compreensão das idéias matemáticas. Na verdade, da nossa busca por tal valor, compreendemos que entre os pesquisadores e/ou professores de matemática, alguns deles parecem indiferentes às distinções de classe e de cultura, enquanto outros parecem querer eliminar de tais distinções, considerando os alunos todos iguais (NIDELCOFF, 1978). Há ainda aqueles que têm colocado todo o poder nos estudos da psicologia da cognição quando se referem ao valor em tomar o conhecimento (matemático) primeiro do educando como ponto de partida para novos conhecimentos (Meira, 1993). E, naturalmente, para todos os educadores (matemáticos), existe ora o questionamento de que se o que vale a pena preservar pode ser reconstruído/transmitido pelos ensinamentos via escola, ora o enfrentamento do complexo caminho a ser tomado dado o relato de Vergani:

> Quando hoje pergunto a uma bailarina se os gestos das suas mãos são longínquos ecos dos ancestrais "mudras" indianos, ela limita-se a sorrir porque simplesmente os desconhece - a origem da ordem itinerante parece viver só na espantosa força anímica que resiste intemporal, tornando seu espaço síncrono qualquer que seja a rota ou destino. (VERGANI, 2003)

Todavia, embora tenhamos escolhido esta forma de abordagem para iniciar uma discussão sobre a etnomatemática (numa concessão à questão que parece ser o cerne das preocupações de quase todos envolvidos nesta perspectiva) não pretendemos deixar o assunto neste tom mais ou menos negativo e explanatório. Afinal de contas, acreditamos, com convicção, que o professor e a professora devem tratar a educação escolar pela via de padrões culturais de comportamento e conhecimento, tanto pelo fato de ajudar na atitude mental dos educandos frente às relações (matemáticas) que o professor quer desenvolver, quanto por questões de ordem político-social como bem expressa Fasheh:

> Ensinar matemática por meio de experiências culturais e pessoais relevantes ajuda os alunos a conhecer mais sobre realidade, cultura sociedade e eles próprios. Isso irá, em troca, ajudá-los a ficar mais atentos, mais críticos, mas apreciativos, e mais confiantes. Irá ajudá-los a construir novas perspectivas e sínteses, e procurar novas alternativas, e, esperamos ajudá-los a transformar algumas estruturas e relações existentes. (FASHEH, 1982, p.8)

2 O documento em CD-ROM, organizado pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Etnomatemática-GEPEm/FEUSP e publicado pela Associação de Professores de Portugal-APM contém o resumo (em inglês e português) da produção científica em etnomatemática – por volta de cinqüenta (50) trabalhos acadêmicos, teses e dissertações – realizadas no Brasil, nos últimos 20 anos. A dissertação de mestrado de Andréia Lunkes Conrado sob o título " A pesquisa brasileira em etnomatemática: desenvolvimento, perspectivas, desafios", apresentada/defendida em abril de2005, apresenta uma discussão/análise da produção científica em etnomatemática – por volta de sessenta (60) trabalhos acadêmicos entre teses e dissertações – realizadas no Brasil, desde os anos 80 até a presente data.

E a etnomatemática, como interpretá-la?

Do nosso ponto de vista, uma das bases fundantes da etnomatemática está na crença de que diferentes relações matemáticas ou práticas matemáticas podem ser geradas, organizadas e transmitidas informalmente, assim como a língua, para resolver necessidades imediatas. E como um meio operacional do fazer, no centro dos processos fazer-saber de uma comunidade, a matemática é parte do que nós chamamos cultura. Desse ponto da vista, nós não somente consideramos a etnomatemática como a área de estudo que reflete sobre as raízes culturais do conhecimento matemático, mas também como o conjunto das relações quantitativas e espaciais, geradas no coração da comunidade cultural, que compõe, muitas vezes, o que tem sido teorizado como matemática.

Para a etnomatemática o educador encontraria sentido na ação de aprender e ensinar se tomar como ponto de partida padrões cultural do grupo – tarefa nada fácil, pois é como se estivesse em busca de identificar e interpretar um amontoado de símbolos (ordenados) significativos para o "outro" diferente dele. Neste sentido, a etnomatemática está relacionada à compreensão do significado de cultura - o qual tem passado por inúmeras interpretações ao longo do último século - o contexto dentro do qual os comportamentos, acontecimentos e organizações sociais vão sendo escritos e as estruturas de significado vão sendo socialmente estabelecidos. Uma interpretação na visão de Silva (1993, p.28):

> [...] a cultura contém a trama de signos com que as pessoas significam os objetos, os acontecimentos, as situações e as outras pessoas que as rodeiam. Cada indivíduo, de posse do código, se movimenta facilmente no universo de sua cultura, age na certeza de ter seu comportamento confirmado pelo grupo.

Nesta perspectiva, as relações envolvidas/construídas num e noutro campo – da cultura e da matemática - são estruturadas, naturalmente em diferentes níveis de complexidade epistemológica – porém, com certeza, incluindo os objetos matemáticos na trama (cultural) "de signos com que as pessoas significam os objetos" (Silva, 1993, p.28).

Do considerado, frente à pergunta "E a etnomatemática, como interpretá-la?", esta pode ser reconhecida como uma linha de pesquisa da educação matemática que investiga as raízes culturais das idéias matemáticas, indispensáveis para uma melhor compreensão/significação de uma das áreas da educação – a educação matemática - e dos pressupostos geradores de sua construção como, contato entre outras áreas do conhecimento, contato cultural, valores entre outros. Os estudos etnomatemáticos procuram de algum modo, trilhar os caminhos da antropologia, buscando identificar problemas (matemáticos) a partir do conhecimento do "outro", no sentido da compreensão do conhecimento do "outro".

A partir da nossa experiência – com um olhar etnomatemático sobre a educação matemática e o contexto da formação de professores - reconhecemos que encontramos constantemente situações nas quais diferentes inclinações e diferentes decisões/escolhas se manifestam - todas elas condicionadas por padrões culturais. Reconhecer certo aspecto das coisas assim como operar/agir condicionado por padrões culturais consiste em tê-los em conta na tomada de decisões, ou seja, em estar inclinado a usá-lo como um algo a levar em consideração na escolha e na orientação que damos a solução dos problemas, a nós próprios e aos outros. As situações a seguir bem revelam esta condição:

O professor indígena Chitana, da etnia Guarani-Kayowa, quando indagado pelos participantes do Grupo de Etnomatemática sobre a natureza das operações aritméticas para os Guarani-Kayowa, muito bem revela o valor colocado numa contagem, a qual por ela própria já se revela diferenciada da forma universalizada: Explica Chitana Kayowa:

> "[...] uma família convida outra família para almoçar em sua casa... e quando a esposa pergunta ao marido "Quantos vem de lá?", ele assim pode responder : "são quatro e quatro quer dizer o pai um), a mãe (mais um), dois filhos homens(conta um) e duas filhas mulheres (conta um). "Se é do mesmo sexo é um". Continuou Chitana: "pode ser que o marido responda três, o que quer dizer o pai (um), a mãe (um) e quatro filhos... se é do mesmo sangue é um". (Palestra do professor indígena Chitana Kaiowa no Grupo de Estudos e Pesquisa em Etnomatemática/FEUSP, 11 de abril de 2002).

Assim como conta a educadora Mariana Kawall Ferreira ao trabalhar numa escola junto ao Posto Diauarum, Alto do Xingu - onde estudavam professores Juruna, Suyá e Kaiabi – presenciando a distribuição de peixes a todos aqueles que vieram ao porto esperar pelas canoas. Da contagem e distribuição dos peixes, surgiram soluções a problemas aritméticos – levando em conta padrões sócio-culturais diferentes daquelas da matemática acadêmica - como no caso deste formulado a eles por Mariana: "Se ontem à noite você pegou dez peixes e deu 3 para o meu irmão, quantos peixes deve ter agora?". Tarinu Juruna, conta Mariana, deu a seguinte resposta:

> "Ontem à noite peguei 10 peixes. Dei 3 para meu irmão. Com quantos peixes tenho agora? Tenho 13 peixes agora. E explicou seu raciocínio: Fiquei com 13 peixes porque, quando eu dou alguma coisa para meu irmão, ele me paga de volta em dobro. Assim, 10 menos 3 é igual a 7 e 7 mais 6 (o dobro de 3) é igual a 13." (Kawall-Ferreira, 2002, p.56).

Neste sentido, talvez tenhamos sempre que nos questionar sobre a relação existente entre os nossos conhecimentos e valores e os dos outros, de outras comunidades educacionais, consideradas no seu sentido mais amplo. Ou, ainda, tenhamos sempre que nos questionar sobre quais relações devem ser estabelecidas ou que estabelecemos entre os conhecimentos individuais e coletivos, em especial, quando o contexto de discussão é a etnomatemática.

De todo modo, é natural reconhecer que enquanto o olhar etnomatemático busca um distanciamento necessário para não explicar todas as relações percebidas em um vínculo com a matemática acadêmica/universalizada, o olhar científico já se constrói a partir de um recuo dos conhecimentos ditos populares.

Assim, frente à questão "o que é etnomatemática?", as respostas devem ter um olhar mais voltado para uma pergunta do tipo "O que é a (etno)matemática a ser trabalhada na escola?", visto que seria mais valioso para a aprendizagem da matemática que essas não viessem especialmente de discussões da filosofia da matemática, mas da educação matemática. Ou seja, não estaríamos atrás de interpretá-la como um conjunto de disciplinas e/ou como uma atividade científica, mas como produto sócio-cultural, abrindo a possibilidade para falarmos de diversidade cultural, diferença, interculturalidade. Mais ainda, poderíamos com o aprofundamento da discussão compartilhar, pelo menos do ponto de vista teórico, das "teses" elaboradas por Vieira Ferreira:

> "A primeira delas é: a existência de diferenças culturais foi e continua sendo a característica mais marcante de toda história da humanidade. O importante, entretanto, não é discutirmos simplesmente os traços dessa diversidade, mas procurarmos estudar, em cada circunstância, como as diferenças foram transformadas em desigualdade, ou seja, como as diferenças foram e são utilizadas como justificativas para a manutenção de situações de desigualdade social.
>
> A segunda tese, logo, é: se, então, a diversidade cultural é a característica fundamental de todas as sociedades, mas se ela costuma ser usada de modo a desfavorecer os grupos sem poder nas mesmas, dentro da escola isso também acontece. Dentro da escola essa diversidade é esquecida, é tornada invisível, e substituída por uma concepção monocultural que reveste tudo o que nela acontece: a seleção curricular, o trabalho pedagógico cotidiano, a imposição de normas e valores, o processo de avaliação etc.
>
> A terceira tese é: o esquecimento da diversidade não representa apenas a desconsideração das culturas dos grupos sem poder na sociedade. O problema central é que essa desconsideração conduz a processos de aumento da desigualdade social, sempre que uma grande parcela da população escolar que não se identifica com a cultura da escola é excluída, ainda dentro da instituição, sendo impedida, então de receber as informações e conhecimentos mínimos para disputar espaços sociais em igualdade de condições com outros mais acordes aos valores culturais pregados na mesma.
>
> A quarta tese pode ser assim esboçada: a escola só poderá reverter seu histórico comportamento impositivo quando os grupos prejudicados pela dominação conseguirem, também, ouvir sua voz. É impossível pretender o êxito acadêmico dos grupos desprivilegiados na sociedade atual sem que a sua forma de interpretar a realidade seja, ao menos, admitida dentro da escola. Cumpre aos docentes comprometidos com os setores desprivilegiados colaborarem para que esses possam manifestar sua cultura". (Vieira Ferreira, 2002, 99-101).

Vale ainda destacar que quando queremos que os educadores/professores iniciem um movimento no sentido da etnomatemática o "ouvir sua voz" (Ferreira, 2002) - a voz dos sujeitos de um grupo – deve ser uma das buscas essenciais desse educador. Ou seja, deixar emergir - e, então, legitimar - o conhecimento primeiro do "outro", seu modo de interpretar matematicamente a realidade. Na verdade, a etnomatemática tem como busca respeitar e valorizar a diferença, a fim de caminhar por meio de ações/processos que se revertam em benefício das comunidades, em especial das ditas minoritárias.

Foco de interesse: formação de professores

Como indicado no título, um dos focos de interesse deste trabalho está no que diz respeito à formação de professores numa perspectiva da etnomatemática. Temos, de algum modo, procurado chamar atenção dos formadores para o fato de que neste imenso volume de investigações sobre formação de professores "o aluno e a aluna não têm estado de todo fora das propostas de formação de professores, mas também não estão dentro". (Domite, 2006).

Como sabemos, vários modelos têm sido propostos para a formação de professores (de matemática) como em Shulman, (1982), Schön, (1987), Schön, & Rein, (1994), Zeichner, (1993, 1995), D'Ambrosio (1996), Nóvoa (1992, 1997), Jiménez (1995), Fiorentini (1998, 2003), Ponte (1994, 1999), Cooney (1994, 1999), Darsie & Carvalho (1996), Linhares (1995), Thompson, (1983), Tardif (2002), Pimenta (1996), Pimenta & Libâneo (2006). Grande parte deles vem destacando a importância do professor como profissional reflexivo que deve se preocupar tanto com as necessidades emocionais e intelectuais dos alunos como com as funções sociais da educação - exercitando-se como construtor político do projeto pedagógico da escola.

De algum modo, construir ou re-pensar o projeto político-pedagógico da escola pode envolver os professores numa perspectiva mais próxima dos anseios dos estudos etnomatemáticos. Isto é, pode levá-los mais e mais a desejar compreender, em maior profundidade, a escola em que trabalham e os alunos e alunas que recebem, ou seja, gera maior disponibilidade para a formulação de perguntas do tipo "Escola, quem é você?", assim como "Quem são nossos professores e professoras?" e "Nossos alunos e alunas, quem são?" Poder reconhecer, de antemão, quem faz parte do grupo, o que eles conhecem e como conhecem pode levar o professor a perceber mais e mais o potencial em levar em conta a cultura dos alunos no processo de fazer pedagógico.

Vale aqui destacar que de um ponto de vista da nossa discussão sobre formação de professores/as – numa perspectiva da etnomatemática - algumas iniciativas dentro da formação têm sido preciosas, em especial aquelas que se inspiraram nas idéias de Freire e Schön.

De um lado, Freire traz para educação – idéias gestadas nos anos 70 - a idéia de que na relação ensino-aprendizagem os dois lados aprendem, isto é, ao ensinar algo aos alunos o professor aprende deles algo também - porque para Freire "em toda relação entre educador e educando está sempre em jogo algo que se procura conhecer". De outro lado, Freire inaugura, pode-se dizer em termos de mundo, a proposta de situar a ação educativa na cultura do educando. Para Freire, a consideração e o respeito ao "conhecimento primeiro" do educando e "a cultura que cada um traz dentro de si são finalidades de uma professora e de um professor que veem a educação sob a ótica libertadora" (Freire, 1967), ou seja, reconhecem-nos como meios para gerar uma mudança estrutural numa sociedade opressiva – embora, Freire afirme que a educação (escolar) não alcança tal objetivo imediatamente e, muito menos sozinha.

Schön, por sua vez, trouxe para os formadores – idéias gestadas nos anos 80 - o pressuposto de que é a partir da reflexão do professor sobre a própria prática que as transformações podem ocorrer, sugerindo ao formador levar o professor a modos de operacionalização da reflexão na ação e da reflexão sobre a ação (Schön, 1987). A teoria do professor reflexivo propõe uma concepção de docência como prática, que pode encaminhar para a criação de um conhecimento profissional não sistemático e ligado à ação. (Schön, 1995). Tal teorização abre possibilidades para a profissão professor como conseqüência do desenvolvimento do autoconhecimento em termos de docência e do comprometimento com processos de inovação.

De maneira geral, ao concentrar nosso olhar no desenvolvimento da pesquisa que espera refletir Formação de Professores e Etnomatemática, aproximei-me mais e mais dos estudos de Paulo Freire, escolhendo-o como teórico de base para responder aos nossos questionamentos, especialmente porque suas reflexões tem se dedicado à legitimação do conhecimento do "outro" (educando criança e/ou jovem e adulto) o qual, em geral, se forma e se conforma com determinadas relações de poder. A intenção maior é a de propiciar uma transformação da relação que os professores e professoras têm com o desconhecimento sobre quem são seus educandos, o que conhecem e como conhecem sobre eles de modo a propiciar um outro discurso, outra forma de ver e de ser dos formadores, assim como criar oportunidades para a nossa transformação como educadores.

Com estas preocupações e desde que um dos pressupostos básicos da etnomatemática está em focalizar/identificar/legitimar as relações quantitativas e espaciais a partir do conhecimento do "outro", temos encaminhado uma proposta de pesquisa que consiste em: a) reconhecer o quanto os professores e as professoras de matemática estão a par do movimento/literatura sobre Formação de Professores; b) buscar um entendimento das concepções dos professores/pós-graduandos/pesquisadores sobre educação (escolar) e cultura e, c) problematizar questões/processos que emergem da realidade social de uma sala de aula, na qual o conhecimento do educando se torne (de um modo geral e não somente, ora ou outra, por força das circunstâncias) o centro da preocupação do professor. Em termos práticos temos recolhido informações (desde o último ano) a partir de duas intervenções (I e II), como apresentadas a seguir.

Intervenção I - entrevista a professores de matemática, em serviço e/ou graduandos do final do curso de Licenciatura em Matemática (IME-USP) e/ou pós-graduandos, a partir das questões:

1. O que você tem ouvido falar sobre Formação de Professores?
2. Escreva/explicite sobre algumas ideias, desafios ou sugestões que você viu ou ouviu falar com relação à formação de professores.
3. Em sua opinião, quais são as principais características que, nós professores, precisamos ter/desenvolver quando decidimos colocar no centro do processo de ensino-aprendizagem os sentimentos, atitudes, opiniões, cultura e conhecimentos prévios dos nossos alunos?

Intervenção II - solicitação a manifestação dos professores de matemática, a partir do confronto com uma situação que se distingue daquelas dos padrões regulares . Segue o roteiro preparado/ apresentado aos professores.

Como você encaminharia/continuaria as situações em sala de aula, frente aquelas que se apresentaram para o professor Mário e para a professora Janaína (dois casos verídicos). Ou seja, num primeiro momento você é o professor Mário e num segundo a professora Janaína, ambos professores que se propõem a iniciar a aula a partir da fala dos(as) alunos(as)...

- *O professor Mário inicia, em uma de suas 5ª série, uma conversa com seus alunos e alunas sobre o cálculo de divisão, perguntando:*
- *Prof. Mário:* Como vocês fazem o cálculo 125 dividido por 8?
- José (aluno), que vendia chicletes num farol próximo ao centro, começa a falar:
- *José:* Nós somos mais ou menos 10 "caras", quase todo dia, alguns meninos e algumas meninas. Daí, dividimos assim: mais para as meninas que são mais responsáveis que os meninos, mais para os maiores do que para os menores.
- *Prof. Mário:* Dê um exemplo José. Por exemplo, como foi a divisão ontem ou anteontem.
- *José:* Ah! Assim... Eram 4 meninas, 1 é das pequenas; 6 meninos grandes e 2 mais ou menos pequenos. Então nós éramos 12 e os chicletes eram 60. Daí, foi dado metade e metade, um pouco mais para as meninas. A menina pequena ficou com 3 e as outras com 6 ou 7, eu não me lembro bem... Os meninos...
- *Agora você deve se colocar no lugar do professor Mário e continuar a aula...*
- *Janaina (outra situação verídica). Como você procederia?*
- A professora Janaina pergunta ao grupo de alunos/as do 4º semestre do curso de educação de adultos: o que vocês sabem sobre porcentagem? Como vocês fazem o cálculo de uma porcentagem? Vamos pensar sobre...
- *Luiz* (aluno): Hoje mesmo eu precisei fazer um cálculo assim... 35% de 195 e eu faço assim... 19 + 19 + 19 e daí mais 9,5. Deu 30 mais 27 mais... mais ou menos 10.
- *Profa. Janaina:* como você chegou ao 19? Fale um pouco do seu jeito de calcular.
- *Luiz*: Ah! Eu não sei porque faço assim... sempre que aparece porcentagem eu divido por dez porque alguém me ensinou assim e somo as vezes que é...assim...30% somo três vezes, 40% somo quatro vezes.
- *Profa. Janaina:* e como você chegou ao 9,5? Conte-me como você pensou.
- *Luiz:* Eu sei que tem de dividir por dois quando é 25% ou 35% ou 45%, mas eu não sei por que eu faço isso...
- *Agora você deve se colocar no lugar da professora Janaina e continuar a aula...*

Examinamos, até este momento, somente os relatos/respostas referentes à parte II, sobre as situações de sala de aula. Examinamos os relatórios de 48 professores de matemática em serviço, entre os quais vinte e oito (28) são professores de escolas públicas com mais de 10 anos de experiência, onze (11) têm menos de 10 anos (3 deles também em escolas privadas) e os outros nove (09) são alunos de graduação que já lecionam. Trago, aqui, de modo sucinto algo em forma de análise, mostrando que chegamos a uma categorização - em três eixos temáticos – da manifestação dos professores.

O primeiro eixo representa o recorte que evidencia o desejo do professor em transformar a situação-problema real em um exercício matemático ou em um problema da matemática dita escolar (olhando somente para o ensino do conteúdo matemático divisão). Um dos professores assim reagiu: "Muito interessante José, muito interessante! Mas vamos pensar sobre a divisão em partes iguais... vamos supor que você tem 125 caixas de chicletes para dividir por 8 pessoas... mas em partes iguais, divisão em partes iguais! Como você faria esse cálculo?"

O segundo eixo foi construído pela nossa percepção do professor colocar-se em estado reflexivo-crítico – entrando em um processo fecundo de problematização ao reconhecer o conhecimento matemático universalizado em um confronto com as contradições que emergem da realidade. Um deles assim reagiu: "Se levarmos em conta o conhecimento contextualizado de estudantes como José e Luiz, estaremos contribuindo para uma aprendizagem mais significativa da matemática?". Outra professora: "Quando valorizamos e respeitamos a forma de divisão de José no farol, estamos contribuindo para o seu fortalecimento intelectual e emocional, ele pode aprender melhor a nossa divisão?".

O terceiro eixo traduz as tensões do professor em termos de sociedade, política, coletividade e relações de poder, de algum modo, relacionadas à educação escolar. Um dos professores: "Esta é uma questão política terrível... nossos alunos vendendo chicletes no semáforo... o que aquelas crianças estão fazendo lá?".

E, então, o que aprendemos com esta pesquisa em andamento? Qual o tipo de impacto que nossas reflexões sobre educação matemática, etnomatemática e formação de professores sofreram ao analisar tais manifestações? De algum modo, consideramos de antemão que qualquer que seja a nossa re-elaboração frente a estes resultados, esta estará sendo construída na interação do conhecimento acumulado até tal estudo e as conseqüências/resultantes do mesmo. Ou seja, o que discutiremos a seguir foi de alguma maneira gerada desta pesquisa, mas já tinha sido acordado tanto pela nossa incursão nas teorizações dos teóricos aqui enunciados como pela nossa experiência como professores e formadores.

Nesta perspectiva, discutiremos a seguir como os modos de continuidade as aulas dos professores Mário e Janaína levou a criações/tensões em termos de atitudes dos professores (de matemática) quando o propósito está em formá-los levando em conta o "conhecimento primeiro" dos alunos nos processo de aprendizagem pela escola.

Uma primeira percepção em termos de atitude do professor está diretamente voltada para o desenvolvido da escuta, a disponibilidade em escutar o aluno. Como muito bem aponta Freire, o professor deve desenvolver uma "abertura à fala do outro, ao gesto do outro, às diferenças do outro, e (...) isto não quer dizer, evidentemente, que escutar exija de quem realmente escuta sua redução ao outro que fala (...) isto não seria escuta, mas auto-anulação". (Freire, 1996, p. 135).

Escutar o outro, segundo Freire, é no fundo, falar "com" eles, enquanto simplesmente falar "a" eles seria uma forma de não ouvi-los. Para Freire, o educador aprende a falar escutando, o que implica numa constante disponibilidade do sujeito que escuta à fala, provisoriamente incompreensível, do outro.

E aqui está um grande desafio no caso da educação escolar... A nossa escuta enquanto professor (de matemática). De modo geral, nós professores (de matemática) temos uma "escuta" pouco desenvolvida. Em geral, nós, como professores, formados pela escola dita tradicional, não estamos preparados para escutar - e, então, falar "com" o outro – talvez pelo fato de que as práticas pedagógicas dos nossos professores giraram quase sempre em torno das explicações ou de apresentação de questões já por eles formuladas. De modo geral, vivemos num ambiente escolar no qual o professor muito pouco "escuta" dos alunos ou pouco procura interagir dialogicamente às questões por eles/elas formuladas.

Na verdade, ao pensar em desenvolver no professor a atitude de uma escuta mais atenta e apurada, estamos procurando reverter a dinâmica das relações em uma sala de aula de matemática que, em geral, são feitas de explicações e informações ao invés de perguntas. De fato, como afirma Freire, "o educador, de modo geral, já traz a resposta sem lhe terem perguntado nada"! (Freire & Faundez, 1986:53).

A segunda atitude por nós intuída após tais resultados – como aquela a ser desenvolvida quando o propósito é formar os professores de modo a levar em conta o "conhecimento primeiro" em sala de aula - está em dar outra interpretação para a idéia de pré-requisito – como aquele conhecimento que pode servir de filtro/apoio para a aprendizagem de (novas) idéias (em matemática).

Em geral, a idéia de pré-requisito tradicionalmente empregada na educação matemática é como um embasamento de ordem lógica, indicado pelo matemático, como um fato necessário para o conhecimento do item a ser estudado. Pré-requisito, dentro deste novo olhar, refere-se ao esforço do professor em compreender como o aluno compreende está ou aquela idéia (matemática), como ele/ela faz relações significativas em torno de uma idéia/conteúdo matemático – como um tal conhecimento matemático está para o aluno... Como ele o usa, maneja.

Se retornarmos, por exemplo, a sala de aula da professora Janaína e de fato tomarmos como ponto de partida o modo como o aluno-adulto Luiz usa a idéia "sempre que aparece porcentagem eu divido por dez e somo as vezes que é... assim... 30% somo três vezes, 40% somo quatro vezes..."(porque alguém me ensinou assim), estaríamos a contar com algo valioso para iniciar um processo significativo em termos do assunto porcentagem.

E vale aqui comentar que mesmo sendo uma atitude pouco elaborada/acordada em nós professores de matemática e, por isso não bem avaliada em termos de valor para a aprendizagem da matemática, devemos observar que o pré-conhecimento - adquirido no meio social/escolar/familiar - que o aluno (Luiz) traz sobre o assunto (porcentagem) está recheado de memória, símbolos e raciocínio. A intervenção do aluno Luiz vem elucidar, de algum modo, o novo significado e papel que estaríamos tomando para pré-requisito, especialmente quando estamos atuando no ensino fundamental. O sentido está em mostrar/discutir o valor em aproveitar o conhecimento que o aluno já traz/maneja/usa para a construção das relações matemáticas tradicionalmente esperada a ser pela educação escolar convencional.

Do nosso ponto de vista, a compreensão de uma nova visão, por parte dos professores/as, de pré-requisito - como aquilo que o aluno sabe usar, seja qual for a lógica/racionalidade e termos desse uso - deve ser um dos aspectos a ser introduzido/explorado/incluído nas investigações em Etnomatemática e Formação de Professores.

A constatação dessas atitudes por parte dos professores – levar em conta o "conhecimento primeiro" do aluno e atenção a própria "escuta" - passou a ser um dos aspectos que nós procuramos introduzir/explorar/incluir nas nossas discussões em educação (etno) matemática e formação de professores. Em ambos os casos, cremos poder afirmar que muitas das dificuldades na aprendizagem da matemática ocorrem pela nossa falta de envolvimento emocional e intelectual, como professores de matemática, frente a formulação e solução dos problemas que os alunos resolvem. Por um lado, nós professores de matemática, parecemos não considerar que o educando, adulto ou criança, tem uma concepção de um aspecto do conhecimento que resultou da história de aprendizagem dele e, é esse conhecimento, no estado em que se encontra que vai fazer a filtragem entre ele e o novo conhecimento. Por outro, as questões que instigam a ação de pensar matematicamente e podem levar a formulação de problemas matemáticos não é mostrado ao aluno. E, então, se tudo está definido e pronto, como pode ser importante o que o aluno tem a dizer sobre matemática? Qual o valor em escutá-lo?

Algumas considerações

A intenção deste artigo foi a de um olhar para trás no sentido de fazer uma retrospectiva sobre problemas e soluções do caminho do meio entre Formação de Professores e Etnomatemática, assim como de provocar tentativas de formular problemas de modo a refletirmos mais e mais sobre esta interação. E nesta etapa de finalização, mesmo reconhecendo que somente iniciamos uma discussão na direção de novas questões – como pré-requisito em outros moldes e escuta do educador -, consideramos importante chamar atenção para três pontos, frutos da nossa reflexão para o desenvolvimento destas ações no âmbito da formação dos professores dentro de uma perspectiva etnomatemática.

O primeiro ponto refere-se ao fato de que há inúmeras situações-problema e soluções do contexto não escolar - que resultam do trânsito por diferentes áreas do conhecimento e, em geral, são validados/compartilhados pela experiência - que a matemática que aprendemos no contexto escolar não nos deixa perceber, talvez pelo fato da tradição de valorizarmos sempre um tipo de matemática – a matemática construída na academia, em geral, livre de contextos.

O segundo, diretamente aliado ao primeiro, diz respeito ao modo do uso de tais situações. Quando percebemos, como professor de matemática, situações ricas (matematicamente) como geradoras de uma aula de matemática, a construção de uma ponte entre o conjunto de relações (matemáticas) aí presentes e aquelas a ser sistematizadas pela educação escolar é colocada em risco devido a inúmeras tensões - entre o pensamento e a emoção, o pensamento e as tradições, o pensamento e a matemática acadêmica - que nos levam a conflitos, em geral, em virtude da tendência da linguagem para assumir diferentes significados. Na verdade, para que esta ponte ocorra é, muitas vezes, necessária uma tradução entre discursos por meio de uma atenção cuidadosa aos significados, às representações e, muitas vezes, aos elementos lingüísticos.

Terceiro, se nosso objetivo diante de uma pesquisa do tipo está em desenvolver um currículo de formação de professores no qual se problematize processos que emergem da realidade social do educando, reconhecemos que a fundamentação para preparação dos formadores e professores de matemática exige uma incursão na literatura focalizada não só na Educação Matemática, mas também na Antropologia, Sociologia, História, Psicologia e, em especial, na produção de pesquisa sobre Formação de Professores.

E, finalmente, vale aqui destacar que refletir com os professores de matemática sobre o desenvolvimento de tais preocupações – o "conhecimento primeiro" dos educandos e "escuta" do professor - não é incompatível com orientá-los sobre o ensino e a aprendizagem da matemática acadêmica/escolar - ao contrário, estes podem ser aspectos a ser envolvido nos processos aprender e ensinar matemática.

Bibliografia

Bishop, A.J. (1988). *Mathematical Enculturation*, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers

Cooney, T. (1999). Conceptualizing teachers ways of knowing. *Educatinal Studies in Mathematics.* 38, 163-187.

_____. (1994). Conceptualizing teacher education as a field of inquiry: theoretical and practical implications. In: *XVIII International Conference Psychology of Mathematics Education.* Lisboa.Proccedings of XVIII PME. Vol. II, 225-232.

Campos, M. O'Dolne (2001). "Estar aqui e estar lá: tensões e interseções com o trabalho de campo. *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática –CBEm 1*.

D'Ambrósio, U.(1990). *Etnomatemática*. São Paulo: Editora Ática.

_____. (2001). *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica

Darsie, M. M. P.; Carvalho, A. M. P. (1996) O início da formação do professor reflexivo. *Revista da Faculdade de Educação (USP)*, São Paulo, v. 22, p. 90-108.

Domite, M. C. S. (2006). Formação de professores e etnomatemática: compreendendo para pedir mudanças. In: Anais do III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática-III SIPEM. Águas de Lindoia/SP: III SIPEM, 156-158.

Ferreira, M. K. L. (2002). Quando 1 + 1 ≠ 2. Práticas matemáticas no Parque Indígena. In: *Idéias Matemáticas de povos culturalmente distintos.* (Org.. Ferreira, M. K. L.). São Paulo: Global Editora/FAPESP. p.56.

Ferreira, M. V. (2002). Mas, afinal, para que interessam a um cigano as equações? In: *Experiências étnico-culturais para a formação de professores.* Belo Horizonte: Autêntica. P. 95-108.

Fiorentini, D. (Org.) (1998). Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In: *Cartografias do Trabalho Docente professor(a)-pesquisador(a).* (Org. Fiorentini, D.). Campinas: Editoras Mercado das Letras e Associação de Leitura do Brasil.

_______. (Org.) (2003). *Formação de professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares*. 1. ed. Campinas: Mercado de Letras.

Freire, P. (1967). *Educação como prática de liberdade*. Rio e Janeiro: Editora Paz e Terra

Gerdes. P. (1996). *Etnomatemática e Educação Matemática*: Uma panorâmica geral, Quadrante, Lisboa, 5(2), 105-138

________, (2007). *Etnomatemática: reflexões sobre matemática e diversidade cultural.* Ribeirão: Edições Húmus.

Jiménez A. M. P. (1995) Integrando la educación ambiental en el currículum de ciencias. *Alambique: Didática de las ciencias experimentales,* v. 2, n. 6, oct.

Knijnik, G. (1996). *Exclusão e resistência. Educação Matemática e legitimidade cultural*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Nidelcoff, M. T. (1978) *Uma escola para o povo* São Paulo: Editora Brasiliense.

Nóvoa, A. (Org.) (1992). *Os professores e a sua formação.* Lisboa: Edições Dom Quixote.

_____. *Os Professores e a sua Formação – Temas Educacionais I.* Lisboa: Editora Nova Enciclopédia. 1992.

Pimenta, S. G. & LIBÂNEO, J. C. (2006). Formação dos Profissionais da Educação: visão crítica e perspectivas de mudança. In: Selma Garrido Pimenta. (Org.). *Pedagogia e Pedagogos: caminhos e perspectivas.* 2ª ed. São Paulo: Editora Cortez, 11-57.

Pimenta, S. G. (1996). Formação de professores - saberes da docência e identidade do professor. *Educação e Pesquisa (USP).* São Paulo, 22 (1, 2, 72-89).

Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In: J. Tavares, A.Pereira, A. P. P., & H. A. Sá (Eds), Investigar e formar em educação: *Actas do Congresso da SPCE*. Porto: SPCE, 59-72.

_____. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. In: *XVIII International Conference Psychology of Mathematics Education*. Lisboa. Proccedings of XVIII PME, 195-209.

Schön, D. (1987). *Educating a Reflexive Practitioner. Towarda New Design for Teaching and Learning in the Professions.* São Francisco: Jossey Bass.

Schön, D. & Rein, M. (1994) *Frame Reflection: Toward the Resolution of Intractable Policy Controversies*. New York: Basic Books

Schön, D. (1995). Formar professores como profissionais reflexivos. In: NÓVOA, A. (Org.) Os professores e a sua formação. Lisboa: Dom Quixote, 1995, p.77-91.

Shulman, L. S. (1982). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(1-2), 4-14.

Tardif, M. (2002). *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis: Editora Vozes.

Thompson, A.G. (1983). *Teacher' conceptions of mathematics and mathematics teaching: three case studies*. Unpublished doctoral dissertation. Athens: University of Georgia..

Vergani, T. (2003). *A surpresa do mundo - Ensaios sobre cognição, cultura e educação*. Natal: Editorial Flecha do Tempo. (orgs. Silva, C.A. & Mendes, I.A.)

Zeichner, K. M. A (1993). *A formação reflexiva de professores: idéias e práticas.* Lisboa: Educa.

Zeichner K.L. (1995). Novos caminhos para o practicum. In: Nóvoa, A. (Org.) *Os professores e a sua formação*. Lisboa: Don Quixote.

O Cabri 3D na resolução de um problema geométrico

Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas
Centro Universitário Franciscano de Santa Maria – UNIFRA

Resumo

Este artigo trata de uma pesquisa qualitativa, realizada com nove alunos de um mestrado em Ensino de Matemática na disciplina de Geometria e busca verificar como esses estudantes visualizam uma circunferência como objeto geométrico no espaço geométrico tridimensional. Para alcançar esse objetivo, utiliza a resolução de problemas como metodologia de ensino e o Cabri 3D como ferramenta computacional para desenvolver habilidade de visualização. Havia a expectativa do investigador de que apenas a construção mental plana do conceito de circunferência era feita, ou seja, a visualização de uma circunferência como sendo o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de um ponto fixo dado, o que se confirmou com a investigação prévia, de acordo com registros realizados por meio dos recursos de correio eletrônico. Poucos alunos perceberam a possibilidade de obter circunferência como intersecção de dois objetos espaciais, tais como cone e plano, esfera e plano e esfera e esfera, por exemplo, o que veio a ocorrer após o uso do Cabri 3D na resolução do problema proposto. Concluímos, a partir da atividade envolvendo um conteúdo de Geometria Espacial, por meio dos princípios da Resolução de Problemas, com a utilização do software Cabri 3D, que o mesmo é um facilitador das situações de ensino e de aprendizagem desse conteúdo.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Circunferência. Geometria Dinâmica.

Abstract

This paper discusses a qualitative research conducted with nine students in a Master´s degree in a Course of Mathematics Education in the discipline of Geometry and seeks to see how these students visualize circle as a geometrical object in three-dimensional geometric space. To achieve this goal, uses problem solving as a teaching methodology and Cabri 3D as a tool to develop computational ability of visualization. The researcher was the expectation that just plain mental construction of the concept of a circle was made, visualization of a circle as the locus of points of a plan that equidistam given a fixed point, which was confirmed by prior research, according answers of de students by e-mail´s resources. Few students realized the possibility of obtaining circle as the intersection of two spatial objects, such as cone and plane, sphere and plane and sphere and sphere, for example, what was to occur after the use of Cabri 3D in the resolution of the problem. We concluded from the content of an activity involving spatial geometry, through the principles of problem solving, using the Cabri 3D software, that it is a facilitator of situations of teaching and learning of that content.

Keywords: Solving Problems. Circumference. Dynamic Geometry.

Introdução

Durante o II Seminário sobre Resolução de Problemas, realizado no segundo semestre do ano de 2011, apresentamos, na sala temática Resolução de Problemas em Diferentes Contextos, algumas experiências realizadas utilizando softwares computacionais para o ensino de Geometria em um Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e de Matemática.

Na ocasião optamos, dentre outros relatos, por indicar e discutir a forma de resolução de uma questão investigativa, realizada por um dos sujeitos envolvidos em uma pesquisa, a respeito de um problema envolvendo Geometria Espacial, a ser resolvido utilizando o software Cabri 3D.

É nossa intenção, neste artigo, relatar a pesquisa realizada e seus resultados com a análise das soluções apresentadas pelos sujeitos. Para tal, inicialmente, faremos algumas considerações preliminares sobre o ensino de Matemática, no qual acreditamos serem necessárias mudanças que possam modernizar as questões envolvendo Geometria. Em particular, enfatizaremos aquelas a serem levadas a cabo no ensino superior, a fim de que possam chegar até a sala de aula da escola básica brasileira. Em seguida, fundamentaremos nossa compreensão sobre a metodologia de Resolução de Problemas, visualização e tecnologia computacional, para ancorar a pesquisa que será, então, apresentada e, finalmente, teceremos conclusões sobre os resultados obtidos.

Desde os anos 1989, estudos americanos realizados pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) tratam das questões relativas ao ensino de Matemática e apresentam algumas sugestões, as quais poderiam proporcionar melhoria na qualidade em Educação Matemática, por meio do documento conhecido como *Principles and Standards for School Mathematics* ou padrões americanos, os quais foram revisados em 1995. No início do ano 2000, o manual dos *Standards* foi publicado em língua portuguesa pela Associação de Professores de Matemática de Portugal (APM) com o título Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008), doravante denominado de Princípios.

O documento dá um panorama para a matemática escolar e indica que a tecnologia é um componente essencial do ambiente escolar, entendendo esse como uma sala de aula, uma escola ou agrupamento de escolas, no qual os alunos têm acesso a um ensino de Matemática estimulante e de elevada qualidade. Isso é possível, pois, num ambiente envolto com tecnologias, os alunos se integram em atividades que podem ser até mesmo complexas, porém elaboradas por professores comprometidos com o processo de ensino e de aprendizagem, os quais lhes possibilitam elaborar conjecturas, desenvolver atividades exploratórias e relatar procedimentos. Por intermédio de um problema ou de vários, o professor, em geral, desencadeia um processo de ensino no qual os alunos resgatam seus conhecimentos anteriores e partem para novas descobertas.

Em função de nossa experiência de quase quarenta anos de atividades profissionais, percebemos que tal forma de conceber o ensino e a aprendizagem muda o foco de como foi a formação do professor de Matemática nos meados da década 1970, quando ‘ser bom’ nessa disciplina consistia em resolver muitos exercícios, na quase totalidade de pura fixação de fórmulas ou algoritmos. Um exemplo do que estamos afirmando eram os cursos de Cálculo Diferencial e Integral na Licenciatura em Matemática. Nessa disciplina, os alunos orgulhavam-se em resolver todos os exercícios do N. Piskunov ou do W.Granville, dentre outros. Quem resolvia a maioria desses exercícios era considerado bom aluno de Matemática. Naquela época, a concepção de resolução de problemas era a de solucionar exercícios, geralmente, dispostos ao final de cada capítulo dos livros. A maioria utilizava a teoria, as fórmulas e a prática de resolução já empregada antes e resolver um problema nada mais era do que aplicar a teoria e a prática desenvolvida na sala de aula. Como exemplo, temos o estudo de máximos e mínimos, cujos problemas de aplicação surgiam ao final do capítulo e não como desencadeadores do assunto.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), indicam insatisfação quanto a resultados obtidos na aprendizagem dos alunos e isso aponta para necessidades de mudanças que possam reverter um ensino apoiado em procedimentos mecânicos e desprovido de significados (BRASIL, 1977). Naquela década, era discutida a necessidade de reformulação dos objetivos para a matemática escolar, revisão de conteúdos e, sobretudo, a busca de novas metodologias adequadas ao tempo em que o aluno percorria sua trajetória. Embora os PCN existam há bastante tempo, poucas mudanças percebemos no dia-a-dia da escola, como podemos comprovar em pesquisas e relatos de professores durante encontros de Educação Matemática, o que atribuímos à falta de inovações curriculares na Licenciatura em Matemática.

Duas características da área de Matemática constantes daquele documento são:

> - A atividade matemática escolar não é “**olhar para as coisas prontas e definitivas**”, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade.
>
> - Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da **análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática**. (BRASIL, 1977, p.19-20, grifo nosso)

A partir dessas recomendações dos PCN, podemos notar o quanto resolver uma grande quantidade de exercícios, como no exemplo do Cálculo, citado antes, não significa que o aluno esteja praticando a atividade matemática. Na maioria das vezes, ele se limita a **olhar para as coisas prontas e definitivas** ao comparar sua solução com a resposta ao final do capítulo do livro, ou ao fazer um exercício observando como foi feito o anterior, **sem reflexão e análise** dos procedimentos que o levaram a compatibilizar seu desenvolvimento com o acerto ou erro na resposta. Assim, se a resposta do aluno ao exercício coincide com aquela apresentada pelo livro, a atividade está concluída. Essa é a confiabilidade na aprendizagem e, em caso contrário, ele refaz os cálculos, sem sequer contestar a resposta apresentada pelo autor do livro.

Com relação a caminhos apontados para ‘fazer Matemática’ na sala de aula, os PCN indicam, dentre outros, o recurso à resolução de problemas. A partir de alguns princípios, é indicado que “Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la”. (Idem, p. 44)

Um segundo caminho apontado no documento é o uso das tecnologias da informação (TICs), com o que concordamos plenamente, uma vez que a ferramenta computacional é, atualmente, realidade tanto na escola quanto nas atividades diárias das pessoas. Entretanto, muitos são os professores que ainda não utilizam tais recursos em suas aulas, mantendo um ensino antiquado e desmotivador.

Nesse sentido, indagamos: se, o futuro professor não recebe preparação na sua formação, como poderá utilizar-se das tecnologias? É verdade que, muitas vezes, até são oferecidas disciplinas, por exemplo, de Geometria Dinâmica, entretanto as mesmas ocorrem em paralelo com as disciplinas de Geometria, porém desvinculadas, o que não é diferente com outras. Acreditamos que novas formas de abordagem dos conteúdos devam ser feitas diretamente, utilizando recursos diversificados, como os softwares disponíveis, mas não em momentos e situações de aprendizagem distantes e distintas.

Por outro lado, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) sugerem competências e habilidades desejadas para estudantes desse nível de ensino. Quanto à representação e comunicação, é desejável e esperado que estudantes façam uso das tecnologias básicas de redação e informação, como os editores de texto dos computadores, enquanto em relação à investigação e compreensão, procuram e sistematizam informações relevantes para a compreensão da situação-problema, formulam hipóteses e resolvem problemas, elaboram estratégias de enfrentamento das questões, interpretam e criticam resultados a partir de experimentos e demonstrações.

Os PCNEM indicam para o ensino de Matemática os seguintes objetivos: desenvolver capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo; utilizar, com confiança, procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos. Essa finalidade para o ensino ainda é corroborada por pesquisadores em Educação Matemática, como afirma Van de Walle (2009, p. 57), para quem "A maioria, senão todos, dos conceitos e procedimentos matemáticos podem ser ensinados melhor através da Resolução de Problemas."

Na linha de indicativos para mudanças curriculares, não podemos deixar de lado o tratamento à formação de professores. Em relação a isso, o PARECER N.º: CNE/CES 1.302/2001 orienta, nas Diretrizes Curriculares Nacionais, para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura que,

> desde o início do curso, o licenciando deve adquirir familiaridade com o uso do computador como instrumento de trabalho, incentivando-se sua utilização para o ensino de Matemática, em especial para a formulação e solução de problemas. É importante também a familiarização do licenciando, ao longo do curso, com outras tecnologias que possam contribuir para o ensino de Matemática. (p. 6)

Podemos inferir, a partir dessas considerações preliminares, que resolução de problemas e tecnologias são dois elementos que devem estar presentes no ensino e na aprendizagem de Matemática em todos os níveis de escolaridade. Entretanto, a concepção do que seja resolução de problema é algo que ainda não está definido de forma unânime nas orientações emanadas dos documentos citados. O mesmo ocorre com a concepção e o uso das tecnologias para o ensino. No próximo item, faremos uma visita à literatura relativa aos dois temas.

Resolução de problemas

No parágrafo anterior, verificamos que documentos de conhecimento público indicavam a necessidade da 'resolução de problemas' e foi encontrado, em várias ocasiões, o termo 'resolver problemas'. Assim, é necessário buscar literatura pertinente, a fim de que possamos, no próximo item, exemplificar como é tratado o assunto em atividades envolvendo Geometria e Tecnologia Computacional.

Segundo Onuchic (1999), um problema "[...] é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver". (ONUCHIC, 1999, p. 215 apud Onuchic e Allevato, 2004). Dessa forma, qualquer questão que desafie o aluno à sua resolução, mesmo que não conheça os métodos de fazê-lo, pode ser considerado como um problema, bastando para tal que haja o desejo de realizar a tarefa.

Para Hiebert et al. (1977 apud Van de Walle, 2009), "Um problema é definido aqui como qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método 'correto' específico de solução". (p. 57) Tal definição muda, de certa forma, a concepção do que seja um problema, pois o mesmo pode ser constituído de atividades ou tarefas e não de um problema formal, como perdurou por muito tempo.

Segundo o autor, um problema que tenha por objetivo a aprendizagem matemática possui algumas propriedades, dentre as quais a preocupação que os alunos devem ter quanto a produzir significado à Matemática envolvida, de modo a compreender tais ideias, e a necessidade de que assumam a responsabilidade de verificar se as respostas encontradas na resolução da tarefa, atividade ou problema estão corretas, produzindo justificativas convincentes, as quais fazem parte do processo.

Dessa forma, para Van de Walle (2009, p. 58), "Ensinar com tarefas baseadas em resolução de problemas é mais centrado no aluno do que no professor. O ensino começa e se constrói com as ideias que as crianças possuem". Isso muda a forma de interpretar o 'resolver problemas', como exemplificamos na introdução, com o caso do Cálculo em que o professor 'ensina' o conteúdo matemático, resolve para os alunos alguns exemplos e esses passam a praticar no estilo 'siga o modelo' e, por fim, supõe que as habilidades adquiridas possibilitam a resolução de alguns problemas ditos de aplicação. Se investigarmos a forma como são ministradas muitas das disciplinas na formação de professores de Matemática, verificaremos que essa é a forma mais empregada ainda nos dias atuais.

Para Onuchic e Allevato (2009, p. 97),

> a metodologia ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática, através da resolução de problemas tem o objetivo de expressar uma concepção em que ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento. Além disso, essa metodologia integra uma concepção mais atual sobre avaliação.

Entendemos que essa forma de conduzir a resolução de problema inova outras concepções, na medida em que o processo de avaliação é conduzido paralelamente ao ensino e à aprendizagem e, assim, compromete ambos os sujeitos envolvidos no processo.

Outro aspecto importante na abordagem das autoras diz respeito ao fato de não haver uma forma rígida de colocar em prática a metodologia o que, geralmente, engessa uma teoria ou metodologia. Indicam as seguintes etapas a serem seguidas na organização de atividades de resolução de problemas: preparação do problema; leitura individual; leitura em conjunto; resolução do problema; observação e incentivo; registro das resoluções na lousa; plenária; busca de consenso; formalização do conteúdo.

Schoenfeld (1992), ao discorrer sobre perspectivas matemáticas sobre os problemas que são problemáticos, afirma que matemáticos dificilmente são unânimes em suas concepções de resolução de problemas. Indica, ainda, que

> cursos em resolução de problemas em nível universitário têm objetivos que vão desde a 'remediação' e 'pensamento crítico' até 'o desenvolvimento da criatividade'. No entanto, há um particular ponto de vista matemático, em relação ao papel que os problemas têm na vida daqueles que fazem Matemática. (p.15)

Para o autor, há muitos artigos e relatórios tentando caracterizar a natureza da Matemática contemporânea e um dos impulsos para sua reconceitualização é que ela é a ciência dos padrões. Segundo ele, a Matemática hoje é muito mais do que Aritmética e Geometria e entendemos que um dos grandes apelos está nas tecnologias computacionais, particularmente com softwares de Geometria Dinâmica, que permitem observações de fatos de forma muito rápida, de acordo com a movimentação de mundo e da ciência.

Dessa forma, resolver problemas com o auxílio de ferramentas computacionais pode ser um elemento a mais a contribuir para a Educação Matemática e, particularmente, neste trabalho, para a Educação Geométrica.

Visualização e Tecnologia para resolução de um problema de Geometria Espacial

Em nossas pesquisas e trabalho com Matemática, especialmente na formação de professores, tanto inicial quanto continuada, há preocupação com visualização, uma vez que o termo ainda tem, para muitos, o significado de 'ver com os olhos'. Autores como Presmeg (1986), Bishop (1989), Eisenberg and Dreyfus (1989), Zimmermann e Cunninghan (1991), Costa (2000), Leivas (2009), para citar alguns, têm estudado a respeito do assunto.

Entendemos visualização como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos. O termo visualização, para Arcavi (1999), constitui uma habilidade ou processo que pode ser pensado como produto de uma criação ou interpretação, quando o sujeito forma imagens, figuras ou diagramas em sua mente, utilizando papel, ferramentas tecnológicas ou outro meio, o que, para Fischbein (1987), se constitui em conhecimento intuitivo. "É uma afirmação trivial que se tende naturalmente a pensar em termos de imagens visuais e aquilo que não pode ser imaginado visualmente é difícil de conceber mentalmente". (p. 103). Além disso, para ele, "Uma imagem visual não somente organiza os dados em estruturas significativas, mas é também um fator importante para orientar o desenvolvimento de uma solução analítica; representações visuais são essenciais dispositivos antecipatórios".(p. 104)

Entendemos que a tecnologia do Cabri 3D, para o ensino e a aprendizagem de Geometria, é uma poderosa ferramenta e, dessa maneira, a utilizamos nesta pesquisa investigativa de resolução de um problema de Geometria, o qual se encontra na interface entre Geometria Plana e Espacial, ou seja, uma circunferência é um conceito que inicia na Plana, porém não é visualizado e discutido na Espacial, de um modo geral. Por exemplo, a imagem mental de uma circunferência, na Geometria Espacial, pode ser formada a partir da intersecção de uma superfície esférica com um plano, dentre outras possibilidades que surgirão no decorrer da pesquisa.

A partir dessas considerações, será apresentado, a seguir, um cenário de uma pesquisa realizada com base na metodologia de Resolução de Problemas, utilizando a ferramenta computacional Cabri 3D, amparado na habilidade de visualização. A atividade de pesquisa foi engajada e realizada durante o desenrolar de uma disciplina de um Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática, no RS, onde o pesquisador é o professor da disciplina, que transcorreu no primeiro semestre letivo de 2011, mostrando, assim, uma possibilidade tanto de ensino quanto de aprendizagem.

A quase totalidade dos participares da disciplina era formada por professores da Escola Básica. Todos tinham algum conhecimento prévio dos conteúdos da disciplina, especialmente no que diz respeito ao ensino e, na primeira parte, foi realizada uma reconstrução da Geometria Plana por meio de um *software* livre com auxílio da Internet. As atividades eram propostas, os sujeitos faziam sua construção geométrica, nomeavam e postavam num grupo social criado especialmente para tal. Ao mesmo tempo, era necessário redigir documento em editor de texto, com a formalização do conteúdo envolvido e postado no mesmo local. Posteriormente, o professor analisava as soluções e, na aula seguinte, eram feitas as discussões sobre as atividades realizadas na aula anterior. Isso possibilitou revisar conhecimentos fundamentais para retomar o estudo de Geometria Espacial, que viria a seguir.

A partir da concepção de Hiebert (1977 apud Van de Walle, 2009), nesse momento já se apresentava 'um problema', uma vez que as atividades envolveram os estudantes na realização da tarefa sem uma regra já elaborada ou memorizada. De outra forma, não havia um método correto para a resolução, o que desafiava todos a se engajarem no trabalho com a certeza e a garantia do professor de que haveria um processo avaliativo envolvido, valorizando o trabalho realizado. Isso corrobora o que é caracterizado como metodologia de ensino-aprendizado-avaliação através da resolução de problemas por Onuchic e Allevato (2009).

A partir dessa reconstrução de conhecimentos de Geometria Plana, pretendíamos retomar e refazer conhecimentos de Geometria Espacial. Para tal, a ferramenta utilizada foi um laboratório de informática com um computador disponível para cada aluno, tendo o Cabri 3D instalado.

O objetivo e a pesquisa

Consideramos que é marcante o estudo de Geometria Plana, nos diversos graus de ensino e que, usualmente, um conceito matemático, feito em determinado espaço geométrico, não é retomado quando o espaço geométrico é outro. Isso fica evidente quando se passa a abordar Geometria pelo viés da Geometria Analítica ou da Álgebra Linear, em que os objetos geométricos são considerados também por suas expressões algébricas.

Na Geometria Euclidiana, com régua e compasso, nos parece, até certo ponto, ser irrelevante distinguir circunferência de círculo, uma vez que não é possível obter o segundo usando apenas os referidos instrumentos. Entretanto, a partir de Descartes, esses dois conceitos têm representações analíticas e elas são diferentes. Enquanto uma circunferência é dada por uma igualdade, um círculo é dado por uma desigualdade e, ao iniciar-se no estudo da aritmética no Ensino Fundamental, o aluno tem necessidade de distinguir igualdade de desigualdade e carrega isso ao avançar pelas séries seguintes.

Ao passarmos ao estudo de Geometria Espacial, parecemos não considerar o plano como um subconjunto do espaço e assim, temos os objetos desse plano também como objetos do espaço. A fim de esclarecer um pouco mais e podermos justificar nossa questão de pesquisa, exemplificamos com a equação $x^2+y^2 = r^2$, em que r é um número real positivo. Como os estudantes internalizam que essa é equação de uma circunferência, pois, na maioria das vezes, o tema é introduzido quando o espaço ambiente é o plano, ou isomorficamente, o $\mathbf{R}^2$, têm grande dificuldade de a visualizarem como um cilindro, quando o espaço é tridimensional ou o $\mathbf{R}^3$.

Entendemos por espaço ambiente o conjunto no qual os objetos matemáticos são considerados. Por exemplo, o espaço ambiente pode ser a reta e nessa existem os elementos geométricos ponto, segmento de reta e semi-reta. No espaço ambiente plano encontram-se os elementos ponto, reta, semi-reta, semi plano, por exemplo, e assim por diante.

Como o *locus* no qual a pesquisa é feita é constituído de licenciados em Matemática, professores dos diversos níveis de ensino e participantes de uma disciplina de Geometria num mestrado justificaram a seguinte questão de pesquisa:

Estudantes de um programa de pós-graduação em Ensino de Matemática visualizam uma circunferência como um objeto geométrico no espaço ambiente tridimensional?

Para responder à questão de pesquisa, formulamos o seguinte objetivo:

Investigar se estudantes de um programa de pós-graduação em Ensino de Matemática visualizam uma circunferência como um objeto no espaço ambiente tridimensional.

Os objetivos específicos da pesquisa são os seguintes:

- averiguar se os investigados tinham o conceito de circunferência bem estruturado, em virtude de sua formação inicial, bem como a partir do estudo desse lugar geométrico ao terem utilizado o software GeoGebra;
- analisar se o conhecimento axiomático anteriormente revisado na disciplina auxiliou na busca do conceito de circunferência;
- investigar se o software Cabri 3D auxiliou na visualização do conceito de circunferência como intersecção de duas superfícies no espaço tridimensional.

No desenvolvimento da pesquisa, de cunho qualitativo, foi empregado um laboratório de informática com o software Cabri 3D instalado para o desenvolvimento de parte de uma disciplina denominada Fundamentos de Geometria no mestrado em que o pesquisador atua como docente.

Participaram nove estudantes em uma sessão de quatro horas-aula, durante o primeiro semestre letivo de 2011 e os registros foram encaminhados ao professor via e-mail.

Antes de iniciar a pesquisa propriamente, foram dois encontros para familiarização com o software Cabri 3D, antecedidos de atividades de Geometria Plana com o uso do GeoGebra, como já citado antes. Depois do segundo, o pesquisador passou e-mail para todos os nove alunos da disciplina, solicitando que, até a véspera do terceiro encontro, encaminhassem resposta ao questionamento abaixo, nos seguintes termos:

> Pessoal, embora saiba de todas as tarefas de vocês, solicito que encaminhem uma resposta a este e-mail, até quinta feira, 02.06.2011.
>
> Vocês já estudaram o conceito do lugar geométrico denominado circunferência quando trabalharam com o GeoGebra para a construção de conceitos geométricos e também usaram outros mecanismos para tal.
>
> Ao retomarem esse conceito, solicito que busquem alternativas para responder à questão:
>
> **De que forma é possível obter-se uma circunferência em Geometria Euclidiana?**
>
> Vejam que não quero saber como fazer isso no GeoGebra ou de qualquer outra forma e, sim, que pensem ou pesquisem quando é que uma circunferência fica “bem definida”, isto é, é única. Por exemplo, se a pergunta fosse como uma reta pode ser obtida, diríamos:
>
> 1. por dois pontos distintos;
> 2. por um ponto e uma direção dada;
> 3. pela intersecção de dois planos distintos.
> 4. Obrigado!

Entendemos que, a partir do conhecimento inicial dos alunos-professores, algumas possibilidades surgiriam, as quais poderiam proporcionar, na aula seguinte, uma discussão e desencadear motivação para trabalhar com um software que possibilita manusear objetos espaciais, o qual é ainda pouco utilizado, por não ser livre.

Entretanto, o que observamos foi uma falta de atendimento e entendimento quanto ao solicitado, pois todos os respondentes deram a definição de circunferência, sendo que um deles também respondeu 'Pontos equidistantes de um ponto fixo chamado centro'[1]. Apenas três alunos responderam 'Dados três pontos distintos não colineares, definimos uma circunferência'. Notamos que não os caracterizaram como pontos de um plano, o que denota, em nossa compreensão, a concepção do conceito como sendo no plano, para a maioria. Ainda mais, o conceito de A[2], no que segue, expressa claramente a circunferência como lugar geométrico do plano e, logo em seguida, apresenta outras possibilidades no espaço. Essa forma que teve de refletir em sua resolução ilustra tipicamente a metodologia de Resolução de Problemas em consonância com os pressupostos teóricos anteriores.

Três alunos-professores indicaram a possibilidade de obter uma circunferência no espaço. Por exemplo, o encaminhamento de A foi o seguinte:

> Sabemos que, na geometria euclidiana, uma **circunferência** é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão a uma certa distância, chamada raio, de um certo ponto, chamado centro.
>
> Professor, imaginei algo assim:
>
> 1. uma circunferência é definida por três pontos não colineares;
> 2. por um centro e um raio;
> 3. por um centro e um ponto qualquer do plano;
> 4. por um centro e um segmento de reta.
>
> Também pensei da seguinte forma:
>
> i. Se tivermos uma esfera (oca) e a seccionarmos de tal maneira a obtermos duas partes iguais, teremos duas circunferências. Um exemplo disso são linhas chamadas de meridianos.
>
> ii. Ou ainda um cone ou um cilindro, se seccionarmos de forma correta, podemos também obter circunferências.

Percebemos que o aluno, mesmo sem experiência como professor, tem um conhecimento matemático e geométrico um pouco diferenciado dos demais, talvez por utilizar com frequência as tecnologias. Por outro lado, B, que é professor de Escola Básica, demonstra visualizar circunferência não apenas no plano, embora não fique explícito seu conceito, quando assim responde:

> De que forma é possível obter uma circunferência em geometria euclidiana?
>
> 1. Dados três pontos distintos não colineares, definimos uma circunferência.
> 2. Pontos equidistantes de um ponto fixo chamado centro.
> 3. Dado um ponto C fixo (centro da circunferência) e um número real positivo, o qual chamamos raio (r), definimos uma circunferência.
> 4. Pela intersecção de um cone circular reto com um plano paralelo a sua base.

1 As transcrições das escritas dos alunos foram feitas sem nenhuma correção por parte do investigador.

2 A fim de evitar identificação dos participantes, os mesmos foram nomeados por letras maiúsculas na fonte Algerian.

Como a atividade poderia ter sido respondida utilizando qualquer tipo de consulta, houve diversidade de respostas, das quais destacamos a que segue.

O aluno identificado como C, provavelmente, buscou o conceito de circunferência como lugar geométrico de um plano e acrescenta:

> Num sistema de coordenadas cartesianas, uma circunferência pode ser descrita pela equação $(x – a)^2+(y - b)^2 = r^2$, na qual a e b são as coordenadas do centro da circunferência e r é o raio. Caso a circunferência tenha o centro sobre a origem do plano cartesiano, a equação pode ser reduzida a $x^2 + y^2 = r^2$ ou $x = a + r\cos(t)$ ou $y = b + r\text{sen}(t)$.

Observamos que, mesmo indo à busca de equações paramétricas, em geral estudadas em nível universitário, não faz alusão a uma terceira dimensão do espaço geométrico $\mathbf{R}^3$.

D, que atua como professor do ensino superior, demonstra como predomina o conceito do lugar geométrico no plano ao não expressar nenhuma relação com espaço tridimensional:

> Pensei e pesquisei sobre a sua proposta: De que forma é possível se obter uma circunferência em Geometria Euclidiana? e cheguei a algumas ideias.
>
> Pode-se definir uma circunferência na Geometria Euclidiana, a partir:
>
> - de um ponto determinado centro e uma unidade de medida chamada raio;
> - dois pontos e a distância entre eles denominada diâmetro da circunferência;
> - o comprimento da circunferência.
>
> Espero ter entendido a proposta. Até amanhã!!

A partir dessas respostas, foi possível intuir que foi marcante a definição de lugares geométricos no trabalho com Geometria Plana na primeira fase de desenvolvimento da disciplina. Os aspectos visuais obtidos na tela do computador não chegaram a fornecer ou, pelo menos, não sedimentaram propriedades recorrentes para obtenção do lugar geométrico – em que é feito somente uso da ferramenta disponível no software. Essa pode ser uma deficiência na condução de trabalhos com o uso de softwares.

Reunidas as respostas dos alunos, ao iniciar a terceira aula, com a mediação do professor, foi proposta a seguinte sequência de atividades para dar continuidade à resolução ou, pelo menos, ao processo de resolução do problema proposto, por meio de um *slide*:

> - Crie circunferências de acordo com as diferentes formas que você respondeu ao professor por e-mail, usando o Cabri 3D.
> - Abra um arquivo no Word, no qual você descreverá o que fez e colará as imagens obtidas no Cabri 3D.
> - Clique em "Ajuda" na barra de *menu* e selecione "Ajuda de ferramentas". Veja quais são essas diferentes possibilidades para construir uma circunferência no espaço.
> - Quais delas você não tinha encontrado para colocar na sua resposta encaminhada ao professor? Tente obtê-las agora.
> - Você encontrou alguma que não consta na ajuda? Especifique qual é ela.
>
> Grato por sua participação – 02.06.2011

A sequência não foi dada toda de uma vez, para não influenciarmos os alunos com as 'ajudas' do software.

Entendemos que, dessa forma, haveria uma retomada das soluções até então obtidas e que, a partir delas, ocorreria complementação com outras. Assim, a resolução do problema teria sido obtida com o auxílio do software. Foi o que de fato ocorreu para todos, exemplificando-se com o feito por B, ilustrado antes. Foi interessante observar que, para realizar as duas primeiras solicitações, ou seja, utilizar as ferramentas para as representações no Cabri 3D, o aluno obteve a representação que havia indicado como três antes de obter a dois e nem por isso desfez sua construção, apresentando-as em seu relato na ordem em que havia construído (figura 1).

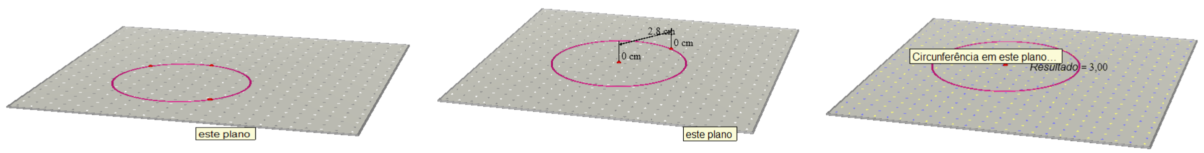


Figura 1: construções 1 , 3 e 2 da circunferência pelo aluno B.

Observe-se a transcrição que B fez para responder:

> 2. Ponto equidistante de um ponto fixo chamado centro.
>
> Nesta situação, fixamos um ponto (o qual denominamos A) e chamamos de centro. Para determinar um ponto equidistante de A, usamos o ícone calculadora e inserimos o tamanho desejado. Posteriormente, utilizamos o ícone circunferência, passando pelo ponto definido como centro (A) e usando o resultado anteriormente inserido pela calculadora.

Como B foi uma das três pessoas que levantaram a hipótese de obtenção de circunferência no espaço, sua construção foi bem coerente. Além disso, a busca de informações e de conteúdos para obter a representação é bem significativa, como podemos observar na transcrição e representação (figura 2) a seguir.

> 4. Definição da circunferência: intersecção de um cone circular reto com plano paralelo à base.
>
> Construímos uma circunferência. Criamos uma perpendicular a esse plano e depois usamos vetor contendo a circunferência e o ponto.
>
> Usando o ícone cone, passando pela circunferência e pelo vetor, foi construído o plano.
>
> Novamente criamos um plano que interceptava o cone construído (paralelo ao plano da base). Ao movimentar o novo plano, verificamos que o cone aparece como ilimitado (temos claramente a noção de cone invertido).

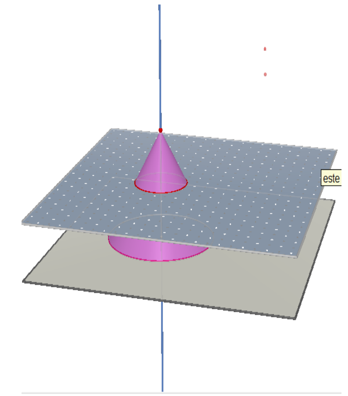


Figura 2: construção por B relativa à sua definição 4.

Na resolução do problema, B dá continuidade, buscando a 'ajuda' oferecida pelo software, como orientado pelo mediador; faz suas construções (figuras 3, 4, 5) e as encaminha ao professor da seguinte forma:

> Próxima atividade: clicamos ícone "ajuda". A partir daí, descobrimos, construímos circunferências que não havíamos encaminhado ao professor
>
> Circunferência dado um eixo e passando por um plano.
>
> Construímos um eixo e ponto fora do plano. A partir daí, construímos uma circunferência, dado o eixo, passando pelo ponto criado fora do plano.

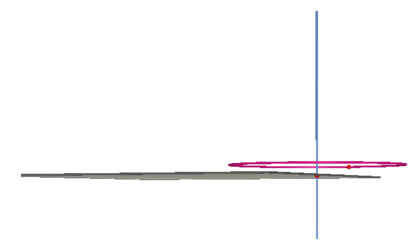


Figura 3: construção feita por B da circunferência num plano, dado um eixo.

> Circunferência de intersecção da esfera e do plano: criamos uma esfera e, posteriormente, uma circunferência. Foi possível aumentar a largura da curva, usando o ícone raio (muito largo).

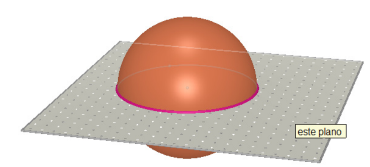


Figura 4: construção feita por B da circunferência obtida pela intersecção de um plano com a esfera.

Circunferência de intersecção de esfera/esfera. Criamos duas esferas e fizemos intersecção. Pedimos, no ícone circunferência, para construí-la a partir do ponto de intersecção entre as duas esferas fora do plano

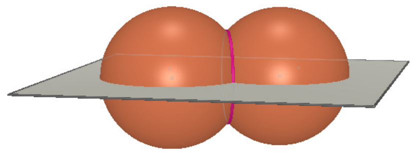


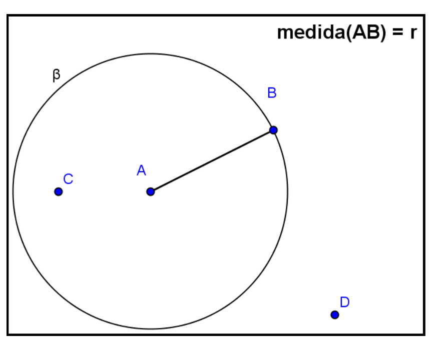
Figura 5: construção por B da circunferência de intersecção de duas esferas.

Os registros obtidos a partir da realização das atividades por B dão, de imediato, um panorama interessante quanto à resolução de um problema até certo ponto simples, mas que demanda um conhecimento a ser construído de forma gradativa. Observamos uma evolução, na medida em que o aluno partiu de conhecimentos de Geometria Plana e evoluiu para conhecimentos de Geometria Espacial, inclusive, na busca de intersecções de superfícies: plano e cone (obtidos naquela pesquisa inicial sem que fossem indicados instrumentos de busca); intersecção de esfera e plano; intersecção de esferas (essa última com esferas de mesmo raio).

E é um professor que atua no Ensino Fundamental e Médio, com longa experiência no ensino de Matemática, em Desenho Geométrico e Geometria Descritiva. A construção inicial feita pelo aluno como resposta à pergunta inicial é bem frágil, porém ele a ilustra com uma construção feita no software GeoGebra, o qual domina com certa profundidade.

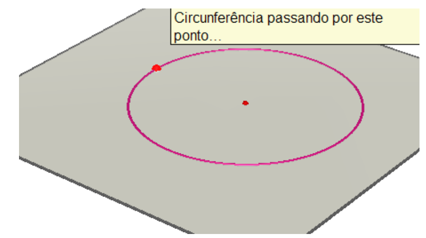
Seja A um ponto do plano e r um número real positivo. A circunferência de centro A e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano tais que a medida do segmento AB é igual a r.

A circunferência β é a única que tem centro no ponto A e cujos pontos estão a uma distância r do centro A. Na figura, o ponto B representa um dos pontos da circunferência que atende a exigência. Os pontos C e D estão a uma distância diferente de r, portanto, não pertencendo à circunferência β.

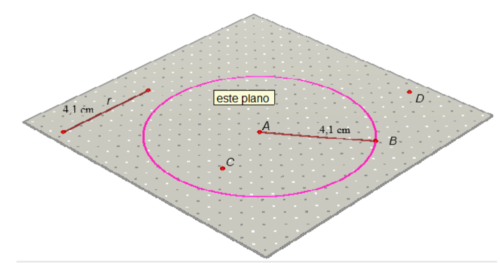


Observamos o cuidado de E com a identificação de pontos que pertencem à circunferência, ao seu interior e também ao exterior, além de caracterizar o raio da circunferência, tanto na descrição, quanto no espaço obtido da janela de visualização capturada do GeoGebra. Como já está evidente no artigo, essa parte apresentada na pesquisa foi realizada antes da utilização do Cabri 3D, tendo chamado nossa atenção o fato de não ter apresentado, como os demais, outras propriedades ou formas de construir e representar uma circunferência. A partir disso elabora, durante o encontro em que se realiza a pesquisa, uma sequência de oito atividades envolvendo as propriedades com o uso do Cabri 3D, obtidas a partir da 'ajuda' oferecida pelo sofware, como segue (figuras 6).

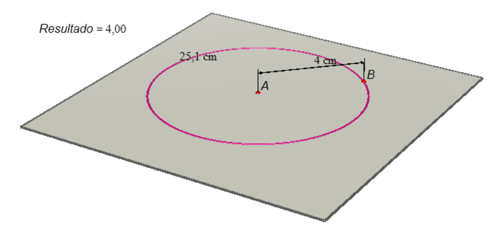
1) Circunferência obtida dados o centro e um de seus pontos.



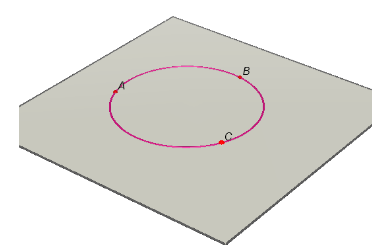
2) Circunferência obtida dados o centro e um segmento.



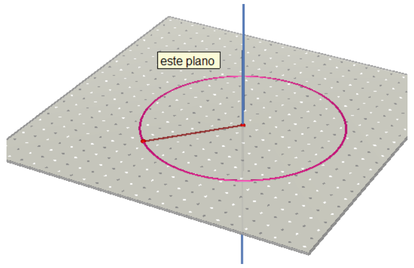
3) Circunferência obtida dados o centro e um número.



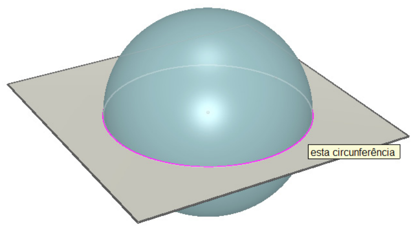
4) Circunferência obtida dados três de seus pontos.



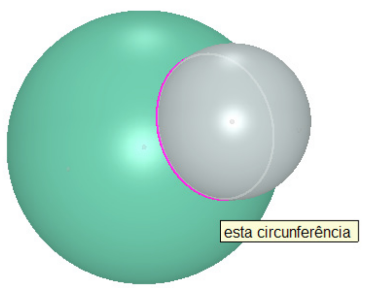
5) Circunferência obtida sendo o seu eixo e um de seus pontos.



6) Circunferência obtida através da intersecção da esfera com um plano.



7) Circunferência obtida através da intersecção de duas esferas.



8) Circunferência obtida através da intersecção de um cilindro circular reto com um plano paralelo a sua base.

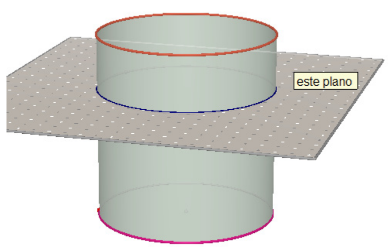
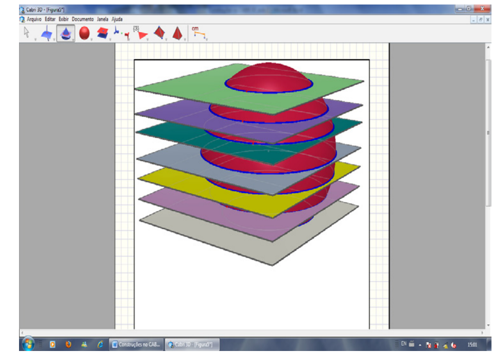


Figura 6: construções da circunferência feitas por E.

As figuras, feitas pelo investigado no Cabri 3D, são criativas e mostram quanto o software favoreceu a visualização e a reconstrução do conceito de circunferência no espaço ambiente tridimensional.

Para completar nossa análise, fornecemos algumas construções no Cabri 3D, feitas por A. A primeira delas fornece uma riqueza de possibilidades de obtenção de circunferências, com raios distintos, a partir da intersecção da esfera por planos. Notamos, na escrita do aluno, inicialmente, que só imaginou a circunferência máxima como a intersecção da esfera com um plano passando pelo seu centro. Logo em seguida, se dá conta que seu problema é aberto e, portanto, com várias soluções, ou seja, qualquer plano paralelo ao primeiro, interseccionado com a esfera, produz uma circunferência (figuras 7).

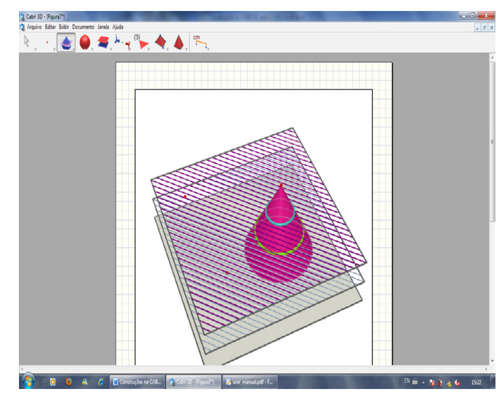
5. Se tivermos uma esfera e a seccionarmos de tal maneira a obtermos duas partes iguais, teremos duas circunferências.



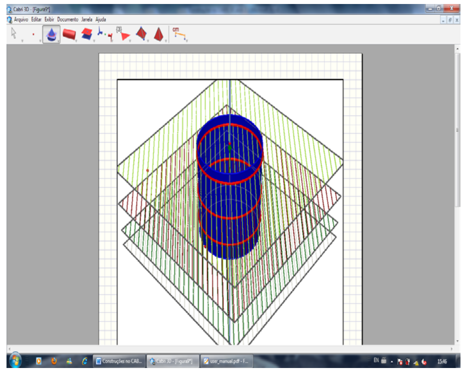
Na realidade, podemos ter tanto circunferências quanto, planos, ao seccionarmos a esfera.
Trace uma esfera sobre o plano e, com a ferramenta plano paralelo, construa os planos paralelos com a ferramenta intersecção, faça a intersecção entre os planos e a esfera e encontrará as circunferências.

6. Cone ou cilindro, se seccionarmos de forma correta, podemos também obter circunferências.

CONE



Com uma circunferência e um ponto fora do plano da circunferência, construa um cone e trace planos paralelos ao plano da base. Com a ferramenta curva de intersecção, você encontrará a circunferência. Podemos encontrar infinitas circunferências, dependendo da quantidade de planos traçados.
CILINDRO

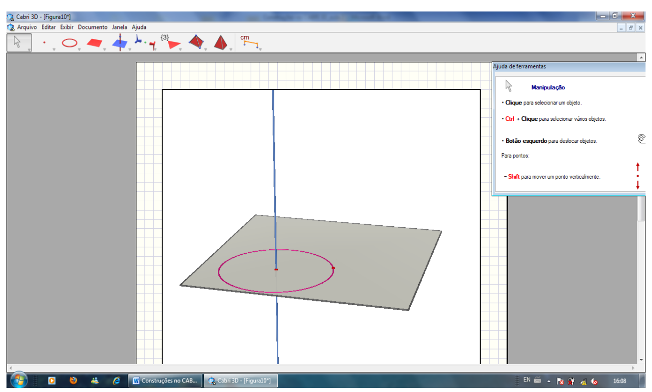


Por um ponto no plano, trace uma reta perpendicular a esse plano. Sobre essa reta tome um segmento de reta. Com a ferramenta cilindro, tome um ponto sobre o plano e o segmento de reta definido e o cilindro será construído. Trace planos paralelos ao plano base e com a ferramenta curva de intersecção você obterá as circunferências dos planos traçados paralelos ao plano base e o cilindro.

Figura 7: construções por A da circunferência como interseção de superfícies.

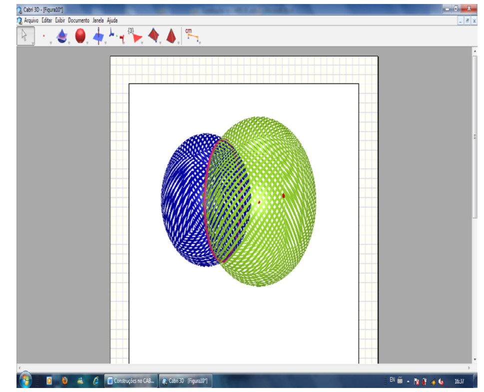
Observamos que A descreve sua construção passo a passo em cada situação. Além disso, utiliza um recurso do software, de hachurar a figura, o que permite, mesmo realizando intersecção com vários planos paralelos, deixar as secções visíveis ao observador. Isso demonstra que esse aluno tem visualização bem elaborada como construto mental. Nas figuras 8, são representadas e descritas duas circunferências por esse aluno.

i. Circunferência dado um eixo e passando por um ponto;



Com um ponto sobre o plano trace uma reta perpendicular ao plano. Com a ferramenta circunferência clique sobre o plano para definir o plano onde a mesma será construída.
A circunferência pode ser construída em qualquer lugar do espaço.

ii. Circunferência intersecção (esfera/esfera).



Ao realizar essa atividade, deu para perceber que, se as esferas estão afastadas uma da outra, não conseguimos ter nenhum ponto de interseção. Elas podem se tocar em um único ponto. Obtemos uma circunferência quando temos a intersecção não vazia das duas esferas, a qual será a borda daquela que tiver o menor raio. Caso a esfera menor esteja no interior da maior, temos que a superfície da esfera menor é a intersecção.

Figura 8: outras contruções de circunferências feitas por A.

Com isso, a análise feita por A é mais completa do que as de B e E, uma vez que ele está interpretando a circunferência como intersecção de duas esferas, a qual pode tornar-se vazia, caso as duas esferas sejam disjuntas. Essa análise mais apurada poderia ainda ser relacionada com o número $r=0$, em que a circunferência se degenera em um ponto, ou com $r < 0$, em que se tornaria uma circunferência imaginária. Não podemos nos omitir de comentar que a escrita feita por A tem incorreções matemáticas, sobre as quais optamos não comentar.

A análise da resolução da atividade por outros participantes leva a ricas e valiosas construções. Optamos por analisar e apresentar essas por sua estética e, principalmente, pela importância que o Cabri 3D teve na resolução do problema de pesquisa e no avanço em relação à visualização como construto mental desses alunos.

Conclusões

Acreditamos que a pesquisa realizada e aqui apresentada corrobora com o que foi preconizado nos PCN, segundo os quais atividades realizadas com a Matemática, na escola, não devem ser consideradas como prontas e definitivas. Na medida em que é realizada uma construção, os conhecimentos vão emergindo do próprio aluno, com a mediação do professor, o qual deve oportunizar riqueza de métodos de ensino que favoreçam a aprendizagem. Discutir essas questões em um curso que envolva o ensino e a educação matemática é, em nosso entender, um aspecto que deve ser considerado, a fim de promover as mudanças almejadas por todos os educadores na formação do professor.

Na presente situação, o uso do software Cabri 3D permitiu e favoreceu a visualização dos alunos, no sentido apontado por Leivas (2009), contribuindo para a elaboração mental do conceito de circunferência, não mais somente como "Dado um ponto C fixo (centro da circunferência) e um número real positivo (raio da circunferência r), definimos uma circunferência", que foi encaminhado ao professor por todos os alunos. Outras possibilidades emergiram, como aquelas apresentadas nas figuras 6, 7 e 8, de forma criativa, uma vez que o dinamismo do software permite ao aluno o melhor ângulo de visão para sua conclusão. Ao promover a discussão de soluções ao problema, como a descrita na figura 8, é possível ampliar o conhecimento matemático de um conceito, que é construído num determinado espaço geométrico, mas no avanço da escolaridade do aluno não é mais retomado.

A resolução do problema, atividade ou qualquer tarefa, como indica Hiebert (1977), que seja proporcionada e cuidadosamente organizada pelo professor para sua aula, torna-se interessante e motivadora para os alunos e, como foi o caso aqui relatado e investigado, propicia o desejo de resolvê-la, o que, de acordo com Onuchic (1991) e Onuchic e Allevato (2004), se constitui numa nova abordagem da resolução de problemas que vai além do fazer Cálculo, como exemplificado na introdução do trabalho.

A pesquisa comprovou que, embora o grupo investigado fosse constituído de licenciados em Matemática, a maioria exercendo o magistério em diversos níveis, o conceito de circunferência como um lugar geométrico do espaço ambiente tridimensional não estava consolidado de forma plena. Os estudantes não tinham a visualização de uma circunferência como interseção de dois sólidos ou de um sólido e um plano ou de uma circunferência degenerada.

Por outro lado, a pesquisa evidenciou que a utilização do software Cabri 3D, com sua dinâmica e ajuda oferecida em seu *menu*, a partir da provocação inicial do pesquisador, foi crucial para a resolução do problema proposto com o uso da janela de visualização.

Para finalizar, evidenciamos a importância de ter bem definido o conceito de **espaço ambiente** definido por Leivas (2009. p. 161), como "espaço geométrico no qual entes geométricos e axiomas são bem definidos e relações estabelecidas e demonstradas, como, por exemplo, o plano euclidiano usual". Esperamos que o artigo venha a contribuir para algumas reflexões em cursos de Geometria desenvolvidos na Licenciatura em Matemática e, por que não, em cursos de ação continuada, como a pós-graduação. Dessa forma, entendemos estar exemplificando uma possibilidade para inovações nos currículos desses cursos.

Referências

ARCAVI, A.. The role of visual representation in the learning of mathematics. In: NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE PME, 1999. **Proceedings**… Disponível em: <http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>. Acesso em: 30 set. 2008.

BISHOP, Alan J. Review of research on visualization in mathematics education**. Focus on Learning Problems in Mathematics**, v. 11, n. 1-2, p. 7-16, 1989.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. PARECER N.º: CNE/CES 1.302/2001.

______________ **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**, Brasil: MEC/SEF, 1997.

COSTA, Conceição. **Visualização, veículo para a educação em geometria**. 2000. Disponível em: <httpwww.spce.org.ptsemCC.pdf.pdf> . Acesso em: 29 jul. 2007

EISENBERG, G. and DREYFUS, T. Visualization and mathematics education**. FOCUS: on learning problems in mathematics.** v. 11: number 1, 2. Massachusets:Publisher Center for Teaching/Learning of Mathematics, 1989.

FISCHBEIN, Efraim. **Intuition in science and mathematics**: an educational approach. Dordrecht: Reidel, 1987.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, Intuição e Visualização:** a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009, 294 p.

NCTM. **Princípios e normas para a matemática escolar**. Lisboa: APM, 2008

ONUCHIC, L. de la Rosa; ALLEVATO, N. S. Resolução de Problemas, software gráfico e detecção de lacunas no conhecimento da linguagem algébrica. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2004, Recife, **Anais**..., Recife, UFPE, 2004.

______________ Trabalhando volume de cilindros a través da resolução de problemas. In: **Educação Matemática em Revista-RS**, 2009, v. 1, pp. 95-103.

PRESMEG, Norma C. Visualization and mathematical giftedness. **Educational Studies in Mathematics,** v. 17, n. 3, p. 297-311, 1986.

SCHOENFELD, Alan H. Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics. In: D. Groups (Ed.), **Handbook for Research on Mathematics Teaching and learning** (pp. 334-370). New York: MacMillan. 1992. Disponível em http://www.google.com.br/search?q=Alan+H.+Schoenfeld+%2B+learning+to+think+mathematically&ie=utf-8&oe=utf-8&aq=t&rls=org.mozilla:pt-BR:official&client=firefox-a>. Capturado da internet em 18 out 2011.

WALLE, J. A. Van de. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 2009.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Eds.). **Visualization in teaching an learning mathematics**. Washington, USA: Mathematical Association of America, 1991. p. 87-94.