UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

MARCONI COELHO DOS SANTOS

INVESTIGANDO PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO: REALIDADES E NECESSIDADES

CAMPINA GRANDE – PB
2015

MARCONI COELHO DOS SANTOS

INVESTIGANDO PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO: REALIDADES E NECESSIDADES

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como requisito para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB.
Área de Concentração: Educação Matemática

Orientadora: Profª. Drª. Abigail Fregni Lins (Bibi Lins)

CAMPINA GRANDE-PB

2015

MARCONI COELHO DOS SANTOS

INVESTIGANDO PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO: REALIDADES E NECESSIDADES

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como requisito para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB. Área de Concentração: Educação Matemática

Aprovada em 31 de agosto de 2015.

Banca Examinadora

Profª. Drª. Abigail Fregni Lins (Bibi Lins) – UEPB
(Orientadora)

Profª. Drª. Kátia Maria de Medeiros - UEPB
(Examinadora Interna)

Profª. Drª. Patrícia Sândalo Pereira - UFMS
(Examinadora Externa)

CAMPINA GRANDE – PB

2015

...E nunca considerem seu estudo como uma obrigação, mas sim como uma oportunidade invejável de aprender, sobre a influência libertadora da beleza no domínio do espírito, para seu prazer pessoal e para o proveito da comunidade à qual pertencerá o seu trabalho futuro.

Albert Einstein

A meus pais, Maria Vitória dos Santos (in memoriam) e Luiz Miguel dos Santos (in memoriam); a minha esposa, Maria Betania Hemernegildo dos Santos e a minha filha Maria Vitória Hermenegildo Coelho dos Santos, além de todos aqueles que, de forma direta ou indireta torcem pelo meu sucesso e estão felizes por mais esta realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço sobretudo a meus pais, Maria Vitória dos Santos e Luis Miguel dos Santos (in memoriam) por alicerçarem a construção da minha vida.

À minha orientadora, Profa. Dra. Abigail Fregni Lins, que tanto ajudou nas pesquisas, mediante paciência, compreensão e estímulo no acompanhamento da evolução deste trabalho.

A minha esposa, Maria Betania Hermenegildo dos Santos, pela referência, pelo incentivo e pelas cobranças em momentos em que eu desviava a atenção.

A minha filha, Maria Vitória Hermenegildo Coelho dos Santos, que veio dar significado e abrilhantar minha vida em pleno momento de pesquisa.

Agradeço à banca examinadora, nas pessoas da Profa. Dra Patrícia Sândalo Pereira, Profº. Drº Oscar João Abdounur e da Profa. Dra Kátia Maria de Medeiros, pelas ricas contribuições para o engrandecer deste trabalho.

A todos os docentes do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, PPEGECM, da Universidade Estadual da Paraíba, pelas valiosas contribuições em minha formação acadêmica.

Agradeço também à CAPES, pela bolsa de estudos via Projeto OBEDUC em rede com as Instituições UFMS, UEPB e UFAL.

Aos colegas da equipe Provas e Demonstrações Matemáticas, nas pessoas de Anderson do Nascimento Araújo, Marcella Luanna da Silva Lima, Leandro Carlos de Souza Gomes e Helder Flaubert Lopes de Macedo.

Agradeço em especial às minhas amigas Andréa de Andrade Moura e Adrielly Soraya Gonçalves Rodrigues, pelos belos e felizes momentos que compartilhamos durante esta trajetória.

RESUMO

SANTOS; Marconi Coelho dos. **Investigando provas e demonstrações matemáticas por alunos do Ensino Médio: realidades e necessidades.** 2015. Dissertação (Mestrado em educação Matemática). Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2015.

Esta pesquisa qualitativa objetivou delinear estudos que desvinculam provas e demonstrações matemáticas de uma visão abrupta, ancorada em um paradigma enrijecido pela falta do conhecimento do poder revelador dessas ferramentas. Para isto foi feito um estudo de caso em uma escola pública estadual na cidade de Areia, Paraíba. O anseio por pesquisar esta problemática veio de vivências desagradáveis do pesquisador com demonstrações matemáticas no caminhar de sua Licenciatura em Matemática e de uma pesquisa realizada na conclusão de um Curso de Especialização em Educação Matemática envolvendo Pitágoras e algumas das diversas demonstrações do seu Teorema. Esta pesquisa de mestrado está inserida em um projeto maior financiado pela agência de fomento CAPES, Observatório da Educação (OBEDUC), em rede entre a Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e Universidade Federal de Alagoas (UFAL). Nossa pesquisa se inicia discutindo a visão de autores sobre aportes teóricos que nortearam o tema provas e demonstrações matemáticas como ferramenta didática nas aulas Matemática, como Hanna, Balacheff, Amouloud, Nasser e Tinoco, De Villiers, entre outros. Nossa pesquisa se deu em três momentos; no primeiro momento realizamos uma intervenção didática abordando definições, teoremas, provas e demonstrações matemáticas com o objetivo de levar aos alunos esses conhecimentos. Foi aplicada uma proposta didática com atividades no segundo momento explorando o conjecturar e o demonstrar o Teorema de Pitágoras. Essa proposta didática serviu para investigar o conhecimento matemático dos alunos do 3º ano do Ensino Médio, divididos em duplas escolhidas livremente. A dupla de alunos que obteve melhor desempenho foi selecionada como nosso estudo de caso. No terceiro momento aplicamos um questionário com o objetivo de obter, dos alunos, a avaliação da intervenção e da proposta didática. A coleta dos dados se deu em dois momentos: com a aplicação da proposta didática e do questionário final. Os dados foram analisados pela técnica da triangulação. De acordo com os resultados, inicialmente os alunos não conseguem demonstrar o Teorema de Pitágoras. Os resultados apontam que os alunos têm dificuldades em algebrizar conceitos matemáticos e, na maioria das vezes, reconhecem o Teorema de Pitágoras apenas via a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$. Os resultados também apontam a tendência dos alunos em compreender afirmações matemáticas escritas na forma de teorema, destacando hipótese e tese. Ao realizar nossa pesquisa concluímos que se as aulas de Matemática contemplassem teoremas, provas e demonstrações, de acordo com o nível de escolaridade, contribuiriam fortemente para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática e do pensamento matemático. Com isto, certamente mudanças curriculares e de crenças necessitam ocorrer.

Palavras-chave: OBEDUC; Provas e Demonstrações Matemáticas; Educação Matemática; Teorema de Pitágoras.

ABSTRACT

SANTOS; Marconi Coelho dos. **Investigating mathematical proof and demonstration by high school students: realities and necessities.** 2015. Dissertation (Master of Mathematics Education). State University of Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2015.

This qualitative research work aimed to design studies which break mathematical proof and demonstration from an abrupt view, based on rigid paradigm by the lack of knowledge on the reveal power of these tools. For that, it was carried out a study case in a state public school in the city of Areia, Paraíba. The anxiety for researching this problematic came from researcher unpleasant moments on mathematical demonstration along his Mathematics Teacher Education Course and from a research done in the conclusion of a *lato sensu* Mathematics Education Course involving Pitágoras and some of the many demonstration of his Theorem. This master research is into a major network project, sponsored by CAPES, Education Observatory (OBEDUC), among the Federal University of Mato Grosso do Sul (UFMS), State University of Paraíba (UEPB) and Federal University of Alagoas (UFAL). Our research begins discussing authors view on theoretical approaches about mathematical proof and demonstration as a didactical tool in Mathematics classes, as Hanna, Balacheff, Amouloud, Nasser and Tinoco, De Villiers, among others. Our research was done in three moments. In the first moment we did a didactical intervention approaching definitions, theorems, mathematical proof and demonstration with the aim of giving the students the knowledge. It was applied a didactical propose with activities in the second moment exploring the Pitágoras Theorem conjectures and the demonstrations. This didactical propose was also for investigating the third year high school students mathematical knowledge, in pairs, freely chosen. The student pair who had better performance was selected as our case study. In the third moment we applied a questionnaire aiming the students evaluation about the intervention and didactical propose. The data collection were done in two moment, with the application of the didactical propose and the final questionnaire. The data were analyzed by the triangulation technic. From the research results, initially the students could not demonstrate the Pitágoras Theorem. The results showed that the students have difficulties in algebrazing mathematical concepts and, most of the time, recognized the Pitágoras Theorem by the $a^2 = b^2 + c^2$ formula. The research results also showed the tendency of students in understanding mathematical statements written in theorem form, highlighting hypotheses and theses. By doing our research, we conclude that if the Mathematics classes contemplate theorems, proofs and demonstrations, according to the school level, would strongly contribute for the Mathematics teaching and learning processes and for the mathematical thinking. Therefore, for sure curricular changes and beliefs changes need to happen.

Keywords: OBEDUC; Mathematics Proof and Demonstration; Mathematics Education; Pitágoras Theorem.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Articulação entre os níveis de pensamento geométrico 48
Quadro 2 - Resumo dos resultados esperados em cada atividade da primeira parte da proposta didática 66
Quadro 3 - Desenvolvimento das atividades planejadas na coleta de dados 72

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Procedimentos de resolução adotados de acordo com o nível de desenvolvimento geométrico de Van Hiele. 44
Figura 2 - Níveis do pensamento geométrico para os Van Hiele 51
Figura 3 - Folha para a redação dos alunos. 65
Figura 4 - Atividade 1 66
Figura 5 - Atividade 2 67
Figura 6 - Atividade 3 67
Figura 7 - Atividade 4 68
Figura 8 - Atividade 5 69
Figura 9 - Atividade 6. 69
Figura 10 - Atividade 7 70
Figura 11 - Questionário final. 71
Figura 12 - Triangulação de dados. 76
Figura 13: Esboço do Estudo de Caso 77
Figura 14: Níveis de Análise. 78
Figura 15 - Atividade 1 resolvida pela dupla A 82
Figura 16 - Atividade 2 resolvida pela dupla A 84
Figura 17 - Atividade 3 resolvida pela dupla A 85
Figura 18 – Resposta da atividade 3 resolvida pela dupla..... A 86
Figura 19 - Atividade 4 resolvida pela dupla A 87
Figura 20 - Atividade 5 resolvida pela dupla A 89
Figura 21 - Atividade 6 resolvida pela dupla A 91
Figura 22 - Atividade 7 resolvida pela dupla A 92
Figura 23 - Resposta da atividade 7 resolvida pela dupla A 93
Figura 24 - Questionário final 95
Figura 25 - Resposta da questão 6 do questionário final..... 98

LISTA DE FOTOS

Foto 1 - Fachada da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Carlota Barreira” 62

Foto 2 - Dupla construindo o quebra-cabeças envolvendo o Teorema de Pitágoras 88

LISTA DE SIGLAS

OBDUC – Observatório da Educação

UEPB – Universidade Estadual da Paraíba

UFAL – Universidade Federal de Alagoas

UFMS – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

INEP - Instituto Nacional de Pesquisa

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **15**

CAPÍTULO 1 20

1.1 Provas e demonstrações matemáticas: fazendo matemática **20**

1.2 Demonstrações em matemática **22**

1.3 Provas e demonstrações matemáticas na educação básica brasileira **23**

1.4 O ensino da matemática **27**

1.5 Finalidades de uma demonstração matemática **28**

1.6 Provas e demonstrações matemáticas do ponto de vista de educadores matemáticos **31**

1.7 Provas e demonstrações matemáticas no olhar do professor **32**

1.8 Provas e demonstrações matemáticas na construção do saber matemático pelo aluno **34**

CAPÍTULO 2 37

2.1 O ensino da geometria e o da matemática **37**

2.2 O ensino da geometria no Brasil **39**

2.3 O pensamento geométrico e os níveis de Van Hiele **42**

2.4 Demonstrações no ensino da geometria **46**

2.5 Demonstrações matemáticas e o pensamento geométrico **51**

CAPÍTULO 3: 54

3.1 Pesquisas qualitativas **54**

3.2 O pesquisador na pesquisa qualitativa **58**

3.3 Problematização e objetivos da pesquisa **60**

3.4 Contextualização e caracterização do ambiente da pesquisa **61**

3.5 Os participantes da pesquisa **62**

3.6 A escolha do teorema **63**

3.7 Intervenção **63**

3.8 A coleta de dados **63**

3.9 Instrumentos da pesquisa **64**

5.9.1 Primeiro Momento: Redação 64

3.9.2 Segundo Momento: Proposta Didática 65

3.9.3 Proposta Didática (1ª Parte) 66

3.9.4 Terceiro momento: Questionário Final 70

3.10 Classificando a pesquisa **72**

3.10.1 O pesquisador no processo 74

3.10 Caminhando para a análise dos dados **74**
CÁPITULO 4 79
4.1 Perfil Da Dupla A **79**
4.1.1 Visão sobre a Matemática 80
4.1.2 Visão sobre provas e demonstrações matemáticas 80
4.1.3 Comentários 81
4.2 Conhecimento Matemático Da Dupla A **82**
4.2.1 Atividade 1 82
4.2.2 Atividade 2 84
4.2.3 Atividade 3. 85
4.2.4 Atividade 4 87
4.2.5 Atividade 5 89
4.2.6 Atividade 6 91
4.2.7 Atividade 7 92
4.2.8 Comentários 94
4.3 Avaliação da intervenção e proposta didáticas pela dupla a **95**
4.3.1 Questionário Final 95
4.3.2 Comentários 99
4.4 Discussão final **100**
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS 103
6. REFERÊNCIAS 109
APÊNDICES 117
APÊNDICE A – Folha para Redação **118**
APÊNDICE B – Redação – Dupla A – Juliana **119**
APÊNDICE C – Redação – Dupla A – Willian **120**
APÊNDICE D – Proposta Didática **121**
APÊNDICE E – Parte I da Proposta Didática Resolvida pela Dupla A **134**
APÊDNICE F – Questionário Final **140**
APÊDNICE G – Questionário Final Respondido pela Dupla A **141**

INTRODUÇÃO

Não fugindo às dificuldades de organizar uma escrita que seja capaz de adentrar em um tema que ainda gera polêmica com relação ao ensino da Matemática na Educação Básica brasileira, *Provas e Demonstrações Matemáticas*, faço inicialmente, um resumo de minha caminhada, desde o tempo de aluno nas séries inicias, passando por minha formação acadêmica e também pela experiência profissional como professor de Matemática da educação básica. Em momentos como esses surge, na minha imaginação um turbilhão de ideias, criando um emaranhado de sugestões para iniciar a escrita, além de um pensamento fixo em procurar palavras que melhor se adaptem ao texto, procurando sempre utilizar uma escrita que explique, de forma clara e eficiente, a essência desta obra sem falar do receio em cometer qualquer tipo de equívoco.

Outrora, quando aluno do antigo 2º grau, Matemática era a disciplina à qual melhor eu me adaptava; desde então, tinha o pensamento fixo de que, quando terminasse o Ensino Médio, prestaria vestibular para o curso de Matemática. Após enfrentar várias turbulências concluí o Ensino Médio e prestei o vestibular para Matemática e sendo aprovado para o mesmo na Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Até então não tinha o pensamento em ser professor, visto que era um mundo distante e ainda sem significado; ao cursar as primeiras disciplinas, deparei-me com algo assustador; comecei a conhecer uma matemática técnica, rígida e até então sem significado para mim; pouco tempo depois de ingressar no curso de licenciatura em Matemática, fui convidado para ser professor desta disciplina na Escola em que estudei; vi nesta oportunidade, a chance de algum ganho financeiro, mas até então a preocupação em ensinar Matemática era nenhuma. Pensava eu: faço um sobrevoo sobre o que já estudei e simplesmente copio o modo de agir de meus professores de Matemática e assim o fiz. A preocupação em ensinar Matemática era apenas a de resolver exercícios e copiar exercícios para serem resolvidos pelos alunos.

Depois de concluída a Licenciatura em Matemática na Universidade da Paraíba e já com algum tempo atuando como professor de Matemática da educação básica, tinha uma visão enrijecida e plasmada sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, utilizando-me de uma metodologia abrupta conveniente com uma visão cartesiana.

No ano de 2010 ingressei no Curso de Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio oferecido pela Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). A partir deste momento tive contato com outras visões e pensamentos em relação ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática permitindo-me ter acesso a materiais científicos que mostravam preocupações com o paradigma atual do Ensino desta ciência.

Aprofundando-me nas leituras e discussões, comecei a perceber um novo horizonte para inovação dos aspectos metodológicos utilizados atualmente; comecei então, a me interessar por temas bastante discutidos por educadores matemáticos e que estão intrínsecos aos processos de ensino e aprendizagem.

Ao finalizar as disciplinas do Curso de Especialização em Educação Matemática apresentei minha monografia baseada em uma pesquisa bibliográfica referente a Pitágoras e às demonstrações de seu Teorema, pesquisa esta que me proporcionou uma descoberta rica sobre este Teorema e suas demonstrações concomitantemente com um valioso enriquecimento sobre a vida de Pitágoras. A partir de então comecei a concatenar minhas ideias e, ao longo deste período, comecei a ter contato com artigos, livros e pesquisas procurando ter um embasamento teórico acerca do tema em questão. Esta linha de pensamento me permitiu elaborar várias pesquisas e escrever artigos os quais foram publicados em eventos e congressos de Educação Matemática.

Ao terminar a Especialização e ingressar no Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, também disponibilizado pela UEPB, meu olhar sobre o ensino da Matemática entrou em um mundo de descobertas, oportunidades e uma nova perspectiva da construção do saber matemático.

No decorrer do meu curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba tive contato com pesquisas que dissertam sobre provas e demonstrações matemáticas, tanto no Brasil como nos EUA e Europa, entre outros temas que estão em ascensão nas pesquisas de Educação Matemática. A partir de então comecei a refletir e indagar sobre como envolver este tema no contexto escolar, o que fazer para despertar a importância das Provas e Demonstrações Matemáticas no processo de ensino e aprendizagem.

O LIMIAR E O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Em vista à problemática citada anteriormente por esta pesquisa, pretendo aprofundar meus conhecimentos em tais processos matemáticos e transformar minha

inquietação em uma realidade que caminhe à luz de novas perspectivas possibilitando a descoberta de meios para uma nova visão da construção do conhecimento matemático.

Esta pesquisa de mestrado é fruto de um projeto maior, financiado pela agência de fomento brasileira, CAPES, denominado OBEDUC em rede, entre a Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), a Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e a Universidade Federal de Alagoas (UFAL). Sua intenção é a de examinar a relação entre o desenvolvimento do aluno via dados do Instituto Nacional de Pesquisa (INEP) e da prática docente. Nossa equipe é formada por um professor Doutor, um mestrando, dois graduandos e dois professores de Matemática do ensino básico e integral para que, juntos, estudássemos a utilização das provas e demonstrações matemáticas, algo por vezes ausente nas aulas de Matemática.

Caminhando à luz das inquietações supracitadas, cogitamos a ideia de realizar uma pesquisa que permitisse a elaboração de momentos de estudos, debates e reflexões; no início, optamos por realizar leituras dos referenciais teóricos que norteiam a importância da utilização de provas e demonstrações matemáticas no contexto da sala de aula. Com o desenvolvimento e o aprofundamento dos temas estudados cada vez mais eloquentes, optamos por elaborar uma proposta didática que privilegiasse atividades envolvendo provas e demonstrações matemáticas para que, quando utilizada em sala de aula, permitisse aos alunos caminhar para a compreensão do significado de uma prova ou demonstração matemática. Concluída a elaboração desta proposta didática nós nos voltamos para a Escola onde a pesquisa seria realizada tendo, como participantes, os alunos do Ensino Médio.

Após nos debruçarmos durante um ano analisando e refletindo sobre nossa proposta, os encontros grupais nos trouxeram experiências de como compartilhar nossos conhecimentos e tarefas. A equipe foi direcionada a trabalhar de forma colaborativa, criando um espaço bastante rico e agradável para a realização de nossas atividades. Delineamo-nos para uma estrutura que criasse sua própria identidade. A cada leitura, a cada discussão, os componentes da equipe imergiram em momentos de partilhas e construção de saberes, concomitante com a gama de conhecimentos que eram adquiridos.

Meu interesse em pesquisar este tema foi desencadeado por minha percepção durante a execução das atividades, como docente. Comecei a ter um olhar mais crítico e reflexivo sobre peculiaridades que estavam presentes no meu cotidiano profissional as quais passavam despercebidas, como: a falta de uma visão crítica para perceber de que

forma os alunos aprendem o conteúdo ministrado, a busca de novos métodos que contribuam para um aprendizado eficiente, a utilização em demasia do livro didático e, por fim, a percepção de que os alunos não conseguiam entender o significado de quando tentavam demonstrar alguma fórmula matemática. Depois dos estudos realizados, discussões e reflexões perante a equipe Provas e Demonstrações Matemáticas sobre as potencialidades da utilização dessas ferramentas no fazer Matemática e na evolução do raciocínio dos alunos, comecei a quebrar paradigmas fazendo uso de algumas atividades que envolvem provas e demonstrações em Matemática que, por sua vez, eram acometidos por um sentimento decepcionante, ao ouvir dos alunos: *Professor, porque o senhor não nos mostra apenas a fórmula? Isto é muito chato!* Percebi que tal processo gera um círculo vicioso no qual os alunos não entram em contato com as provas e demonstrações matemáticas no ensino básico; na universidade elas aparecem de forma técnica e vazia e quando voltamos para a sala de aula não nos sentimos à vontade para trabalhar esta ferramenta com nossos alunos; então, comecei a refletir e perceber que as demonstrações, tal como são expostas para os alunos, se tornavam pedantes, demasiadamente complicadas e também que eles não tinham o conhecimento mínimo sobre a importância de tais processos matemáticos. Partindo deste ponto de vista começamos a desenvolver uma proposta didática que viesse a amenizar esta situação e que, ao invés da chatice atribuída pelos alunos o ato de provar ou demonstrar em matemática se tornasse uma atividade rica e motivadora.

A publicação e a discussão dos artigos em eventos de educação matemática enriqueceram a proposta e iluminaram o caminho a seguir, o que direcionou os encaminhamentos teóricos a serem estudados, com orientação da professora Abigail Fregni Lins (Bibi Lins). Finalizando, chegamos a um estudo que tem, como questão norteadora, a seguinte linha de pensamento: *Que tipo de provas matemáticas pode ocorrer a partir de uma proposta didática por alunos do 3º ano do Ensino Médio?*

Conduzido por esta linha de pensamento organizamos este trabalho em quatro diferentes capítulos iniciando com os estudos sobre a importância das Provas e Demonstrações Matemáticas para o ensino e aprendizagem da Matemática; abordaremos como essas ferramentas podem contribuir para a compreensão e desenvolvimento desta ciência que é simplesmente esquecida durante as aulas e que poderia enriquecer as atividades de construção do saber matemático. Para levantar esses dados analisaremos autores como Almouloud; Fusco (2006), Balacheff (2000), De

Villiers (2001), Fossa (2001), Garbi (2010), Hanna; Jahnke (1996), Morais Filho (2010), Nasser e Tinoco (2003) e Jahn; Healy; Coelho (2007).

A dissertação está organizada em quatro capítulos, além das considerações finais; em que no primeiro Capítulo dissertaremos sobre os referencias teóricos que discutem a introdução de provas e demonstrações nas aulas de matemática na educação básica, enquanto o Capítulo 2 traz as Provas e Demonstrações matemáticas no ensino da Geometria.

Apresentaremos, no Capítulo 3, os aspectos metodológicos, nos quais justificamos teoricamente o tipo de pesquisa escolhida; neste mesmo capítulo descrevemos os participantes envolvidos na pesquisa, os procedimentos, instrumentos utilizados e os recursos metodológicos utilizados para a coleta de dados através da técnica de triangulação para análise dos dados.

No Capítulo 4 exibiremos a análise e a discussão dos dados.

Por fim, são apresentadas as Considerações Finais de modo que, inicialmente, retornamos ao objetivo desta pesquisa de mestrado apontando alguns resultados obtidos a partir dela e discutindo vantagens e limitações inerentes à utilização de provas e demonstrações matemáticas no processo de ensino e aprendizagem.

CAPÍTULO 1

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NO PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

A fé e as demonstrações matemáticas são duas coisas inconciliáveis
FiódorDostoiévsk
Fundador russo do Realismo

Este capítulo versa sobre aportes teóricos que norteiam o tema provas e demonstrações matemática em uma perspectiva da aula de Matemática da Educação Básica. Abordaremos os olhares dos educadores matemáticos e também o ponto de vista de outros estudiosos da Matemática sobre a importância da introdução provas e demonstrações e ensino de Matemática da educação básica. Ao caminhar neste capítulo o leitor vai se deparar com a discussão que envolve as peculiaridades inseridas nesta problemática em que no Brasil ainda está sendo desenvolvida.

1.1 Provas e demonstrações matemáticas: fazendo matemática

Nas palavras de De Villiers (2001) mesmo se existisse uma ferramenta capaz de comprovar a veracidade ou não de um fato matemático, esta não colocaria um fim no processo de demonstração matemática que conhecemos hoje. De acordo com este autor, a riqueza está no processo, no descobrimento de novas teorias, conceitos e técnicas que são desenvolvidas durante a caminhada feita para demonstrar um teorema matemático. Em muitos casos se tornam mais importante para a Matemática as descobertas feitas durante a tentativa de uma demonstração do que afirmar que a conjectura é verdadeira ou não. E assim, nos deparamos, sempre que tentamos verificar a veracidade de um teorema, com a abertura de novas possibilidades para a Matemática conduzindo-nos a novos resultados (DE VILLIERS, 2001).

O mesmo pode ocorrer com o fazer Matemática dos alunos em aulas da educação básica. O ato de explicar, provar e demonstrar seus resultados é passível de desencadear caminhos para que o aluno desenvolva suas habilidades, desenvolvendo estratégias e atitudes que sirvam de guia para a construção do seu saber matemático. A Matemática ensinada desta forma é uma Matemática viva que oferece ao aluno possibilidades de participar de seu desenvolvimento e compreensão. Pesquisas desenvolvidas em Educação Matemática atentam para esta nova abordagem, no ensino da Matemática.

No transcorrer deste Capítulo abordamos o ensino da Matemática do ponto de vista de autores que consideram que provas e demonstrações matemáticas devem estar entrelaçadas no ensino desta ciência. Caminharemos por referenciais teóricos que abordam o estudo e a utilização de provas e demonstrações matemáticas como um fio condutor para o processo de construção do saber matemático. Baseamo-nos em estudos realizados por Almouloud (2007), Hanna e Jahnke (1996), Nasser e Tinoco (2003), Jahn, Healy e Coelho (2007), De Villiers (2001), Morais Filho (2010) e Balacheff (1988a) que evidenciam esta peculiaridade da Matemática atribuindo-lhe fundamental importância para a compreensão desta ciência.

Após longa trajetória de um ensino de Matemática ancorado em uma visão tradicionalista, pautado em um modelo estático que se fundamentava na Matemática Moderna, enfatizando profundamente o aspecto estruturalista da Matemática, inicia-se uma nova abordagem quem vem produzindo mudanças no ensino da Matemática, nos últimos anos. Após essas mudanças e ao desapego das orientações da Matemática Moderna, ocorre um retorno às bases da Matemática acarretando um escanteamento do raciocínio dedutivo e das demonstrações em Matemática (NASSER; TINOCO, 2003, p. 1):

> A realidade mostra hoje, que a maioria dos alunos não está aprendendo a pensar e raciocinar quando estudam os diversos conteúdos da matemática. Se pensarmos um pouco na natureza das aulas de matemática na maioria das escolas brasileiras, chegamos a uma constatação: os jovens não estão habituados a pensar e comunicar suas ideais.

É crucial que o professor desenvolva atividades que possibilitem, ao aluno, trilhar um caminho que o leve a momentos de indagações e do pensar sobre suas respostas, comparando-as, analisando-as e verificando se as respostas são plausíveis com as perguntas dos problemas.

Esta é uma linha de pesquisa que, aos poucos, vem sendo discutida por pesquisadores brasileiros, mas no Brasil ainda necessitamos de mais estudos. Em alguns países, como Estados Unidos, França e Inglaterra, já existem pesquisas mais desenvolvidas evidenciando a investigação sobre provas e demonstrações no ensino da Matemática (PIETROPAOLO, 2005). Esta nova área de estudo vem recebendo bastante atenção dos pesquisadores em educação matemática, tema este sempre presente em publicações e congressos de Educação Matemática (NASSER; TINOCO, 2003).

De acordo com Nasser e Tinoco (2003) a maioria das pesquisas que abordam este tema foi desenvolvida por pesquisadores internacionais, como Hanna; Jahnke

(1996). No capítulo intitulado *Proofandproving*, encontrado no guia da Educação Matemática, *International Handbook of Mathematics Education*, podemos encontrar uma gama de pesquisas de diversos autores internacionais envolvendo provas e argumentações matemáticas (NASSER; TINOCO, 2003).

Acreditamos que o uso desses elementos matemáticos contribui para uma compreensão melhor desta área do conhecimento, incentivando e despertando o interesse e o raciocínio dedutivo dos alunos, dando-lhes condições para a evolução de seus desenvolvimentos cognitivos bem como atribuindo sentido e coesão às fórmulas matemáticas, fazendo-os perceber o verdadeiro sentido de sua existência e aplicação.

1.2 Demonstrações em matemática

No início, quandos os homens eram nômandes, retiravam tudo de que precisavam da Natureza, viviam da coleta de frutos, da caça e da pesca. Nessas condições eles não tinham nem precisavam, de nenhum conhecimento matemático; entretanto, quando este modelo de sobrevivência foi se extiguindo, o homem precisou se fixar em um ambiente e procurar produzir seu próprio sustento. A partir de então novas necessidades foram surgindo, como contar, medir e fazer transações (GARBI, 2010).

De acordo com Ponte et al. (1997) o que restou dos textos originados pelos primeiros povos da Babilônia e Egito se refere apenas a objetos concretos o que, para Lima (2006) deixa claro que os povos daquela época não careciam provar ou demonstrar seus resultados; eles conheciam métodos que davam certo e supriam suas necessidades. No entendimento de Fossa (2001), a Matemática foi desenvolvida como uma ciência criada a fim de contar e resolver problemas. Inicialmente se limitava a solucionar problemas práticos nos quais o homem fazia uso dos conhecimentos matemáticos para contar, medir e calcular. Neste período o homem não lidava com a matemática abstrata; ele não necessitava de definições, fórmulas ou teoremas com suas demonstrações. Conforme a Matemática foi evoluindo, raciocínios mais abstratos, envolvendo argumentação lógica, surgiram com os matemáticos gregos, aproximadamente em 300 a. C. (FOSSA, 2001, p. 128):

> Os matemáticos gregos foram os primeiros a exigir demonstração para os teoremas de matemática. Antes, os babilônicos e os egípcios aceitavam seus teoremas na base da evidência empírica ou de um simples pragmatismo. Os gregos, porém, procuravam um conhecimento mais profundo e, desde os

> primeiros contatos com a matemática, na época de Tales, eles buscavam demonstrações abstratas para os seus teoremas.
> No início do período grego esta procura de demonstrações não foi nada sistemática. Cada matemático baseava suas demonstrações em teoremas anteriores e em um fundo amorfo de conhecimentos matemáticos comuns. Foi só no auge do período clássico da Grécia que Aristóteles fez um balanço desta maneira de proceder e ficou insatisfeito.

Para Ponte et al. (1997) foi por volta do século V que os pensadores gregos desenvolveram as primeiras demonstrações e com elas surge a necessidade de axiomatização e uma formalização mais rigorosa.

Conforme o homem foi evoluindo suas necessidades também ficavam mais complexas e cada vez mais se fazia uso da Matemática para resolver problemas. Esta evolução proporcinou nova abordagem para a Matemática permitindo que não fosse usada apenas para resolver problemas do cotidiano, mas atribuído outro aspecto.

Com a transição do empirismo para a abstração, os gregos propuseram que toda verdade matemática deve ser comprovada ou demonstrada (GARBI, 2010). De acordo com Morais Filho (2010) o fato de que uma sentença matemática necessita de uma demonstração para comprovar sua veracidade, é o que difere a Matemática de outras áreas do conhecimento. Para Nasser e Tinoco (2013) a prova ou demonstração matemática tem diversas funções sendo a função mais usada a de comprovar que um resultado é verdadeiro. Essas autoras afirmam que esta é uma função fundamental da Matemática.

Do exposto, percebemos que a Matemática era uma ciência empirista, utilizada para resolver problemas diários. A passagem de uma Matemática empirista para uma Matemática axiomática, dedutivista não ocorreu rapidamente. Foi um processo longo, construído a partir de erros e acertos. Então devemos agir com cautela para desmitificar a ideia de uma Matemática na qual tudo se encontra pronto, para uma Matemática construída pelo homem. Devemos trabalhar uma abordagem em sala de aula que permita ao aluno participar desta construção, atribuindo-lhe significados para os processos matemáticos por eles utilizados.

1.3 Provas e demonstrações matemáticas na educação básica brasileira

Na educação básica brasileira o ato de provar ou demonstrar matematicamente foi sendo esquecido com o passar do tempo. Nas palavras de Garbi (2010) este processo foi de um extremo a outro. Este autor explica que no Brasil se demonstrava muito, mas no momento atual pouco se demonstra ou quase nada é demonstrado nas aulas de

Matemática. Neste mesmo caminhar Nasser; Tinoco (2003) afirmam que com o retorno às bases da Matemática houve um esquecimento da Matemática dedutiva e das demonstrações. De acordo com Garbi (2010) o Brasil está perdendo espaço e ocupando posições péssimas nas avaliações internacionais. Este autor diz que estamos regredindo para uma Matemática empírica desenvolvida pelos povos antigos para resolver seus problemas práticos e estamos desvalorizando a preciosa contribuição dos gregos em tornar a Matemática uma ciência abstrata e complexa, não permitindo que os alunos sejam levados a pensar. Para Garbi (2010, p. 4) "a reintrodução de doses equilibradas de demonstração no ensino da Matemática é algo que precisa ser feito no Brasil, sem mais delongas".

As demonstrações matemáticas devem ser abordadas mediante um caráter pedagógico, tornando-se um objeto de ensino e este pode ser incorporado às aulas de Matemática. Neste caminhar, faz-se necessário que o professor elabore atividades matemáticas que enfatizem menos o aspecto dedutivista euclidiano, valorize mais a criatividade e o desenvolvimento do raciocínio dedutivo dos alunos, por meio de processos heurísticos.

Neste caminhar, estudos desenvolvidos por Almouloud (2007) apontam para a necessidade de despertar, no professor de Matemática, uma nova visão quanto ao uso de provas e demonstrações no ensino e na aprendizagem, iniciando uma nova maneira de ver esta ciência e concebendo, ao aluno, oportunidade de vivenciar situações que necessitem justificar, provar, argumentar ou demonstrar matematicamente partindo do pressuposto de que esses requisitos são exigências para o ensino e aprendizagem da Matemática que, de acordo com Almouloud (2007) não são levadas em consideração pelos professores.

Em suas pesquisas realizadas com professores da rede pública do Estado de São Paulo, Almouloud (2007) detecta alguns entraves no processo de utilização das provas e demonstrações nas aulas de Matemática. Segundo este autor, além da exigência estabelecida pela LDB de 1996, que configura que no momento de planejar suas aulas o professor deve analisar e detectar as necessidades de seus alunos há o problema de formação acadêmica do professor, na qual esses itens são trabalhados de forma técnica, sendo ministradas de forma que não proporcionam a compressão da necessidade do por que se deve fazer uma demonstração matemática, sendo esta vista apenas com o objetivo de ser memorizada e depois passada para o papel no momento da avaliação. Todas essas situações fecundam, no professor de Matemática, uma grande dificuldade

para compreender, organizar e escrever uma demonstração matematicamente, ou seja, dificuldades entre o falar e o escrever (MORAIS FILHO, 2010). Essas dificuldades geram motivos para evitar o uso desses atributos matemáticos.

Ainda para Almouloud (2007) existe a necessidade de se fazer mais reflexões sobre o estudo de provas e demonstrações matemáticas como elemento favorecedor do construto matemático. Este autor alerta para a busca de caminhos que promovam mudanças nas concepções dos professores de Matemática em compreenderem os caminhos da demonstração bem como provas e justificativas, possibilitando maior poder autônomo e propiciando desenvolver atividades que envolvam esses procedimentos para que sejam trabalhadas com seus alunos (AMOULOUD, 2007).

O que se pode afirmar hoje sobre o ensino da Matemática no Brasil, é que os alunos não são apresentados a situações que os levem a desenvolver seu raciocínio dedutivo (Nasser; Tinoco, 2003), ou seja, o processo de ensino e aprendizagem da Matemática não prepara os alunos a pensar, comunicar ou explicar seus resultados, acarretando em uma baixa assimilação de conteúdos. Os alunos não são capazes de reconhecer, explicar ou justificar quando são questionados sobre conteúdos básicos e bastante conhecidos da Matemática.

Dados obtidos por Santos; Lins (2013a e 2013b) mostram que em uma turma do 1º ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual na cidade Areia – PB, aproximadamente 90% dos alunos não conhecem o Teorema de Pitágoras e nenhuma de suas várias demonstrações. Esses dados são preocupantes já que, de acordo com Morais Filho (2010) o Teorema de Pitágoras é o teorema mais conhecido e mais demonstrado de toda Matemática. Esses dados nos levam a refletir e nos deixam preocupados com a metodologia aplicada no ensino da Matemática. Segundo Almouloud (2007) pouca ou nenhuma importância é dada ao processo de provar e demonstrar, matematicamente, o que gera um problema sério na compreensão e na veracidade dos enunciados matemáticos.

O mérito das demonstrações de teoremas no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio passa despercebido, sendo condescendente com a falta de capacitação dos professores de Matemática para trabalhar esta ferramenta, de grande importância para a construção do conhecimento matemático. Será que os professores estão preparados para trabalhar essas questões com seus alunos? Será que os professores se sentem seguros para desenvolver demonstrações em uma perspectiva que seus alunos percebam com clareza e consigam entender o que significa a demonstração de um fato matemático?

Essas e outras tantas questões ainda geram preocupações nos pesquisadores educadores matemáticos (AMOULOUD, 2007; HANNA; JAHNKE, 1996; NASSER; TINOCO, 2003).

Os teoremas surgem de forma bastante frequente quando se estuda Matemática. Na educação básica possivelmente ocorre o estudo ou até mesmo a demonstração de alguns teoremas. Então, teorema é uma palavra não desconhecida para qualquer pessoa com formação básica em Matemática. Alguns teoremas são tão famosos que chegam a ser conhecidos do público em geral; como exemplo, o Teorema de Pitágoras e o Teorema de Tales (MORAIS FILHO, 2010).

Acreditamos que a passagem desses teoremas na educação básica, conforme anuncia Morais Filho (2010), acontece de forma não compreendida pelos alunos.

Assim, o paradigma atual do ensino da Matemática na educação básica brasileira não permite ao aprendiz desenvolver o seu potencial, no tocante ao processo de raciocínio lógico dedutivo. A metodologia utilizada não enfatiza provas e demonstrações matemáticas. Para vários estudiosos esse tema ainda não se encontra nas aulas de Matemática devido ao fato dos professores da educação básica não terem visão clara de que as demonstrações são um grande alicerce para o saber matemático.

Morais Filho (2010, p. 115) ressalta não ser exagero afirmar que não existe Matemática sem demonstrações; as demonstrações têm papel fundamental em toda a estrutura lógica que constitui a Matemática e de como a Matemática funciona:

> É lamentável, entretanto, a atitude de certos professores e alguns autores de livros didáticos que parecem desejar abolir definitivamente a palavra *demonstração* das salas de aulas e dos livros, como se este desserviço pudesse contribuir, de alguma maneira, para a melhoria do ensino. Para os que têm esta opinião, quando os resultados enunciados não são geralmente impostos como decretos, as demonstrações são, quase sempre, substituídas por frases do tipo *"podemos observar"*, *"temos"*, *"é possível verificar"* etc. Comparativamente, é como se de repente professores de Português deixassem de falar em verbo ou professores de Química, em elementos químicos!

Morais Filho (2010) ainda chama nossa atenção para termos o cuidado de não cometer exageros, pois nem todas as demonstrações matemáticas são passíveis de serem apresentadas aos alunos da educação básica. No entanto, deve ser feita uma análise reflexiva sobre o grau de dificuldade das demonstrações a serem trabalhadas nessas séries de ensino, totalmente diferentes de simplesmente nunca falar nelas. Este mesmo autor ainda nos orientar a não falarmos de demonstrações apenas nos conteúdos de

Geometria Plana, por gerar uma falsa impressão para os alunos de que apenas a Geometria Plana carece de demonstração (MORAIS FILHO, 2010).

Em sala de aula na aprendizagem da Matemática, acreditamos que as provas e as demonstrações matemáticas podem ser exploradas em diversos conteúdos considerando que Hanna e Balacheff denominam de prova ingênua, ou seja, a prova construída pelo aluno deve ser valorizada levando em consideração seu ponto de vista e o nível de racionalidade.

De acordo com Balacheff (1988b) a racionalidade é um ponto fundamental em nossa vida, seja no âmbito individual ou coletivo. É por meio da racionalidade que, quando tomamos alguma decisão, elaboramos um conjunto de critérios e regras visto que em nosso cotidiano vivemos informando, discutindo e agindo. Esta afirmação nos leva a fazer um paralelo em relação à vida cotidiana e às demonstrações matemáticas, porque mesmo essas regras e critérios surgindo por meio de opiniões, conhecimentos ou crenças, elas são organizadas em uma estrutura que nos auxilia na hora de tomar decisões. Balacheff afirma ainda que a racionalidade é essencial para o desenvolvimento e construção de provas matemáticas.

1.4 O ensino da matemática

No tocante ao ensino da Matemática, Costa; Lins (2010) relatam que este segue um paradigma tradicional, no qual os conteúdos são expostos de forma curricular, fundamentado em definições formais, complementado com tática de resolver exemplos e passar exercícios para serem resolvidos, que não aguçam a curiosidade dos alunos nem despertam o interesse em aprender.

Esta problemática fica evidenciada quando exigimos dos alunos justificativas simples ou quando se pede para que eles expliquem como resolveram questões envolvendo conceitos simples e bastante conhecidos da Matemática na educação básica; eles não são capazes, em nenhum momento, de responder satisfatoriamente ou argumentar sobre o processo de resolução utilizado por eles.

As dificuldades em emergir para um paradigma que contemple atividades que visem auxiliar, nos alunos, a perspectiva de desenvolver e aprimorar suas habilidades para dar início à utilização de argumentações, verificações, explicações, provas e demonstrações matemáticas são oriundas da falta de competência dos professores para trabalhar com atividades que enfatizem essas ferramentas. Os obstáculos emergidos da

má-formação pedagógica acabam gerando um ciclo vicioso (NASSER; TINOCO, 2003), ou seja, os alunos não têm acesso às atividades que contemplem essas ferramentas na educação básica e, para o professor, durante sua formação acadêmica as demonstrações têm mais um papel técnico (GARNICA, 2002) e durante sua prática docente o professor não se sente à vontade para trabalhar com essas atividades (ALMOLOUD, 2007, NASSER; TINOCO, 2003 e GARNICA, 2002).

Hanna; Jannke (1996 apud Nasser; Tinoco, 2003), citam que o professor tem papel crucial, exercendo uma função ativa em ajudar os alunos a perceber e entender qual é a função de uma prova ou demonstração matemática e quando ela se faz necessário.

Acreditamos que se alguma mudança ocorrer deve começar pelo professor; afinal, ele é o disseminador do conhecimento e suas atitudes, olhares e concepções refletem na sala de aula e em seus alunos.

1.5 Finalidades de uma demonstração matemática

Persuadir o aluno a simplesmente fazer uma demonstração matemática sem antes fazê-lo compreender o porquê, a necessidade e a essência desses processos não irá ajudar em seu aprendizado matemático; afinal, os alunos não se sentirão incentivados a fazer o que eles não compreendem, ou seja, surgiram perguntas do tipo: Porque devo fazer isto? Qual é o significado?, entre outras. É essencial que seja explicado o motivo da utilização de tais processos.

Uma demonstração matemática tem várias funções, em que uma delas é a de validar uma afirmação matemática; entretanto, alguns autores elucidam outras funções para as provas matemáticas. Para Nasser; Tinoco (2003) outra função da prova é a de explicar ou elucidar que um resultado matemático é verdadeiro. Bell (1976 apud Nasser; Tinoco, 2003), afirma que uma demonstração matemática tem a função sistematizadora, preparando o aluno para dominar o pensamento dedutivo.

Para De Villiers (2002, p. 10) além da finalidade de excluir as dúvidas as demonstrações matemáticas têm outras características importantes:

> ✓ Verificação: convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma afirmação;
> ✓ Explicação: compreensão do por que uma afirmação é verdadeira;
> ✓ Descoberta: de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura;

- ✓ Comunicação: negociação do significado de objetos matemáticos;
- ✓ Desafio intelectual: satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema; e,
- ✓ Sistematização: organização de resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.

O processo de provar ou demonstrar é de grande importância para validar a Matemática mas toda essa importância não desperta o interesse dos alunos da educação básica, que estão habituados ao processo de mecanização de resolução de problemas matemáticos, que arraigaram a obviedade dos resultados caracterizando uma metodologia que tem seu limiar na resolução de problemas e se finaliza com a obtenção de resposta, ou seja, ao aluno não é dada oportunidade de comentar, argumentar ou validar suas respostas (NASSER; TINOCO, 2003).

São atribuídas, às demonstrações matemáticas, todo um rigor e a formalização de que não deixa intervenientes para dúvidas. Uma demonstração matemática segue todo um ritual determinante para a sua aceitação como verdade absoluta. Os matemáticos têm um olhar bastante diferenciado dos olhares dos educadores matemáticos para as demonstrações matemáticas; para os matemáticos puros prova é sinônimo de demonstração, um desenvolvimento formal; de acordo com Morais Filho (2010, p. 114) uma demonstração é definida como:

> Dentro de um modelo axiomático, dadas duas proposições H e T, uma demonstração de que a proposição H (hipótese) implica a proposição T (tese) é uma sequência finita de sentenças P_1, P_2, ..., P_k, tais que cada uma delas é ou um axioma, ou uma definição, ou uma hipótese H_i, ou uma sentença resultante de sentenças anteriores deduzida por argumentações válidas. A proposição final P_k da sequência é a proposição T (tese), resultado de todo um processo dedutivo.

Em outras palavras, Morais Filho (2010) afirma que uma demonstração é dividida em duas partes, em que a primeira consiste em sua estrutura lógica que segue todo um encaminhamento dedutivo; a outra seria sua apresentação, ou seja, o modelo como ela é editada, como essa sequência lógica é mostrada a outra pessoa. De acordo com este autor uma demonstração não é feita simplesmente obedecendo a uma sequência de proposições, mas sempre que alguém escreve uma demonstração está obedecendo a certa estrutura lógica; o mesmo autor enumera os elementos que podem ser utilizados na formação da estrutura auxiliando no desenvolvimento da demonstração. Segundo ele, os elementos são os seguintes:

- ✓ Hipótese (s);

- ✓ Axiomas;
- ✓ Definições;
- ✓ Teoremas já demonstrados; e,
- ✓ Os passos da demonstração previamente provados.

O significado do termo demonstrar tem diversos empregos na língua portuguesa. De acordo com o dicionário Aurélio, demonstrar significa *provar mediante raciocínio concludente; comprovar, mostrar, evidenciar, dar a conhecer, revelar-se;* contudo, quando se trata do emprego do termo demonstração no contexto da Matemática acadêmica este termo assume outros significados. Nas palavras de Morais Filho (2010) demonstrar é um ato de induzir, convencer, utilizando-se de regras e argumentos previamente elaborados baseados em argumentações lógicos dedutivas, dando importância também na forma de saber escrevê-las. De acordo com Morais Filho (2010) não se deve acreditar em uma afirmação matemática sem antes ser apresentada sua demonstração, ou seja, só devemos dar créditos aos fatos matemáticos mediante sua demonstração. Ainda para este autor demonstrar matematicamente é atestar a veracidade de um fato matemático.

Nas concepções de Morais Filho (2010) para fazer uma demonstração matemática deve-se ter um conhecimento bastante aprofundado de como organizar uma sequência de raciocínio lógico dedutivo e também dominar uma gama de conhecimentos matemáticos que servirão como alicerce para sustentar todo um emaranhado de procedimentos matemáticos.

De acordo com Morais Filho (2010) a maioria dos leitores não desperta para diferenciar os verbos mostrar, demonstrar. Esses vocábulos são utilizados como sinônimos, compartilhando de um mesmo significado; este autor ressalta que na Matemática ele prefere usar a palavra demonstração ao invés de prova:

> Para nós, uma prova pode ser a evidência de um fato, mas não necessariamente uma sequência logico-dedutiva de argumentos, tal como uma demonstração foi definida (MOARES FILHO, 2010. p. 116).

Esta falta de conhecimento matemático dos alunos é um grande impasse para que eles consigam caminhar à luz de elaborar uma sequência de raciocínios lógicos dedutivos que obedeçam toda a formalidade exigida por uma demonstração matemática e que seja aceita pelos cientistas matemáticos que, de acordo com Nasser e Tinoco (2010), *os jovens não estão habituados a pensar e comunicar suas ideias.*

Percebe-se que, do ponto de vista dos matemáticos, uma demonstração matemática deve obedecer todo um rigor e estrutura lógica. Essas exigências podem ser

um fardo pesado para alunos que estão iniciando sua carreira de estudante podendo-se tornar em obstáculos para sua compreensão e utilização em aulas de Matemática da educação básica. Este alto nível de rigor e organização fica mais bem adaptado para estudantes já com alto grau de estudos.

1.6 Provas e demonstrações matemáticas do ponto de vista de educadores matemáticos

De acordo com Hanna (1995) e Ballachef (1988b) existe o que eles denominam de prova ingênua, ou seja, o rigor matemático vai sendo exigido conforme o grau de escolaridade e idade do aluno. Os alunos teriam que elaborar argumentações, provas ou demonstrações aceitáveis que talvez para um matemático acadêmico não tivessem alto grau de desenvolvimento ou convencimento, mas que, para o aluno, seria o limiar de um novo processo de construção do conhecimento matemático.

Em suas investigações Rezende; Nasser (1994) conseguiram determinar outras variedades de provas matemáticas, que denominaram de:

> **Justificativa pragmática:** o aluno atesta a veracidade de uma afirmativa com base apenas em alguns casos particulares.
> **Recorrência a uma autoridade:** o aluno afirma que o resultado é verdadeiro porque o professor falou ou porque está no livro.
> **Exemplo crucial:** o aluno desenvolve através de um exemplo, o raciocínio que poderia ter sido feito no caso geral.
> **Justificativa gráfica:** o aluno mostra numa figura, por que o resultado é verdadeiro (NASSER; TINOCO, 2003. p. 5)

Levando em consideração a idade dos alunos e seu nível cognitivo, o professor deve ter um olhar crítico e reflexivo sobre esses tipos de provas, aceitando-as, estimulando justificativa com este perfil (NASSER; TINOCO, 2003).

Essas variedades de provas matemáticas, descritas por Rezende; Nasser (1994) estão baseadas nas classificações de Balacheff (1988a). Este autor apresenta a diferenciação entre explicação, prova e demonstração.

Balachef (1988b) disserta sobre vários aspectos da prova em Matemática do ponto de vista dos processos de ensino e aprendizagem. O mesmo autor diferencia explicação, prova e demonstração matemática. Segundo ele, a explicação é um discurso que objetiva esclarecer a verdade de um fato ou de uma preposição matemática de um sujeito para outro. Se esta explicação for capaz de convencer determinada comunidade, ela pode adquirir o conceito de prova sendo a proposição falsa ou verdadeira. Para

Ballachef (1988c) uma explicação é um discurso em que o locutor tenta convencer um indivíduo ou uma plateia sobre determinado fato que lhe é tido como verdade. Para este convencimento o locutor se baseia em cadeia de regras e enunciado que permita o entendimento de sua explicação. Neste caráter, a explicação abrange um contexto não apenas matemático, mas do cotidiano em geral (BALACHEF, 1988c).

No entendimento de Balachef (1988a) as explicações aceitas por determinado grupo social recebem o status de prova podendo haver discordância entre um grupo e outro na busca de significado para determinar um sistema de comunicação que seja comum entre eles; entretanto, quando a prova se refere a um elemento da Matemática ela é classificada com uma prova, ou seja, uma demonstração matemática é uma prova que segue todo um rigor matemático e uma formulação bem estruturada de axiomas, definições e teoremas já demonstrados.

A prova matemática, além da função de validar uma afirmação matemática, também tem a finalidade de explicar um resultado e também sistematizá-la, preparando o aluno, por meio da observação das demonstrações apresentadas pelo professor, começar a dominar o conhecimento das estruturas matemáticas, permitindo com o passar do tempo, desenvolver demonstrações matemáticas por si mesmo. Assim, o professor não deve camuflar as dificuldades oriundas do processo de elaboração de uma demonstração matemática e, sim, trilhar meios para que esses obstáculos sejam superados (NASSER; TINOCO, 2003).

Na visão dos educadores matemáticos, as provas e demonstrações têm papeis diferenciados em sua formalidade e é alcançado de acordo com o desenvolvimento dos alunos. Caminhando nesta perspectiva e adotar esta visão para a educação básica, podem ser conveniente e frutífera, fazendo os alunos caminharem passo a passo em seu desenvolvimento.

1.7 Provas e demonstrações matemáticas no olhar do professor

Almouloud (2007) trata de questões teóricas envolvendo provas e demonstrações matemáticas e também o pensamento de professores que fazem parte de uma formação continuada; em seguida, ele traz resultados de um estudo de caso envolvendo dois professores de Matemática que demonstram ter dificuldades em identificar elementos de uma preposição matemática, como hipótese e tese, que são fundamentais no processo de prova e demonstração matemática.

Segundo Almouloud (2007) estamos passando por um momento no qual queremos respostas prontas e rápidas, percebermos em sala de aula quando começamos a ensinar um conteúdo e logo surgem as perguntas: *professor, quando é que vou precisar disto; professor, para que isto serve; professor que o senhor não nos mostrou logo a fórmula*, entre outras. Almouloud denominou esta impaciência pelos resultados de síndrome do imediatismo. Segundo o autor, esta vontade de querer os resultados instantaneamente é defendida por autores adeptos de um ensino contextualizado que, segundo esses autores, trazem mais significados para os alunos e apresentam uma aplicabilidade mais realista da Matemática. De fato, alguns conteúdos matemáticos se tornam mais atrativos para os alunos quando são contextualizados com situações vivenciadas por eles em seu cotidiano. Entretanto, de acordo com Almouloud (2010) existem estudiosos da Educação Matemática que defendem o ensino desta ciência por meio do uso de provas e demonstrações matemáticas; isto fica visível pelo número de trabalhos apresentados em congressos e também do aumento do número de teses abordando este tema.

Para Almouloud (2006) os problemas enfrentados pelos professores estão desde a visualização de uma demonstração em um livro didático, identificar em uma proposição matemática a hipótese e a tese, e também verificar se na proposição existem condições necessárias ou suficientes. Outros problemas mencionados por Almouloud (2006) estão na dificuldade do professor em organizar uma demonstração matemática por meio de dados oriundos da proposição ou obtidos por elementos matemáticos já conhecidos em uma sequência de raciocínios lógicos-dedutivos para validar o que se deseja provar. Esses problemas são oriundos de um ciclo vicioso em que o professor em suas fases de formação não vivencia situações que façam uso das provas e demonstrações matemática como parte integrante desta ciência. Este caminhar permite a criação de obstáculos que culminam no abandono deste recurso por parte dos professores.

Se for possível uma mudança, uma transformação significativa do ato de ensinar Matemática, esta deve partir dos professores porque se há de haver alguma modificação no processo vigente de ensino. O poder de mudança se encontra nas mãos dos professores; afinal, são os professores responsáveis por refutar ou enaltecer os processos metodológicos.

1.8 Provas e demonstrações matemáticas na construção do saber matemático pelo aluno

A sala de aula deve ser transformada em espaços vivos, ricos e transformadores, ambiente no qual o aluno se sinta à vontade para elaborar suas conjecturas e desenvolver o seu raciocínio partindo da premissa de que estudar Matemática é caminhar em busca de compreensões e significados que façam sentido para nossa vida. Os moldes como se desenvolvem as aulas de Matemática atualmente privilegiam um aspecto, receita, ou seja, a Matemática é ensinada seguindo um manual com passos e regras a serem aplicadas. De acordo com Ponte; Pereira; Henrique (2012, p. 1):

> O grande objetivo do ensino da Matemática é o desenvolver a capacidade de raciocínio dos alunos. Trata-se de um objetivo ambicioso, mas necessário, que justifica o importante papel da Matemática em todos os sistemas educativos. Os alunos não desenvolvem a capacidade de raciocínio matemático por simples memorização de conceitos, representações e procedimentos rotineiros que, pelo contrário, os leva a ter uma visão da Matemática como um conjunto de regras mais ou menos desconexas e não como disciplina lógica e coerente (ME, 2007). Para desenvolver esta capacidade é preciso trabalhar em tarefas que, por um lado, requerem raciocínio e, por outro lado, estimulam o raciocínio. Só deste modo se pode esperar uma compreensão efetiva dos conceitos e procedimentos matemáticos por parte do aluno.

Os alunos usam a Matemática escolar para resolver problemas trazidos pelo professor que também não enxerga ou traz atividades que permitam aos alunos a possibilidade de justificar seus resultados, ou seja, eles resolvem acreditando na autoridade do professor e no que estudam pelo livro didático que também não abordam as provas e demonstrações matemáticas (NASSER; TINOCO, 2003, ALMOULOUD, 2007).

De acordo com Almouloud (2010) os alunos querem respostas prontas, algo que tenha resultados imediatos ou que tenham alguma aplicabilidade em seu cotidiano. Para este autor, a linha de pensamento é defendida por estudiosos que defendem o ensino de uma Matemática mais contextualizada; todavia, existem autores que são adeptos do uso das provas e demonstrações matemáticas como recurso para desenvolver o pensamento matemático dos alunos; afinal, é um dos objetivos inseridos nos PCN e presentes nos planejamentos dos professores de Matemática (NASSER; TINOCO, 2003).

Nesta visão existe a preponderância de uma mecanização onde se aplicam regras previamente decoradas e se chega a um resultado que, na maioria das vezes, não faz sentido para os alunos. Assim, não há possibilidades de observação para que inicie um

processo de indução e formulação de conjecturas que, posteriormente, possam ser comprovadas culminando na utilização de um raciocínio dedutivo.

De acordo com De Villiers (2001) um grande obstáculo para o uso das demonstrações matemáticas é a falta de percepção dos alunos em enxergar a necessidade de demonstrar seus resultados:

> A dificuldade que os alunos têm em compreender a necessidade da demonstração é bem conhecida dos professores do ensino secundário e é identificada em toda a investigação em educação, sem exceção como um dos maiores problemas no ensino da demonstração. Quem não já experimentou uma sensação de frustração quando confrontado com a pergunta "Porque é que temos que demonstrar isto?" (DE VILLIERS, 2001, p. 31)

Neste âmbito, Santos; Lins (2012) obtiveram dados que convergem para a afirmação de De Villiers (2001) em que os alunos não conhecem, não sabem e não veem a necessidade de demonstrar o Teorema de Pitágoras que, de acordo com Eves (1992), é o teorema mais conhecido e com o maior número de demonstração de toda a Matemática.

Seguindo a linha de pensamento de Gonobolin (1954, apud De Villiers, 2001), as demonstrações têm papel desnecessário para os alunos, principalmente quando essas demonstrações parecem óbvias ou podem ser feitas por meio de testes empíricos. Isto é confirmado por Nasser; Tinoco (2003) que descrevem várias possibilidades de demonstração por parte dos alunos.

Não é correto atribuir a dificuldade dos alunos em entender, achar necessário ou desenvolver uma demonstração matemática, ao seu desenvolvimento cognitivo. A falta de competência em raciocinar logicamente, a não capacidade de dedução não deve ser tida como elementos norteadores dessas dificuldades (DE VILLIERS, 2001). Para De Villiers (2001) o problema também está na falta de entendimento do aluno no porquê de uma demonstração matemática.

Os alunos não estão habituados a comunicar suas ideias nem a provar ou demonstrar seus resultados. Estamos vivenciando um modelo de ensino em que os resultados devem ser imediatos e não existe preocupação em validar esses resultados. Os conteúdos matemáticos são orientados para uma contextualização com a vida cotidiana dos alunos, de modo que toda a preocupação é voltada para resultados práticos, negligenciando o aspecto estrutural e formal, íntimos da Matemática.

Para autores como Almouloud (2007), Nasser; Tinoco (2003), Morais Filho (2010), entre outros, torna-se necessário adotar uma metodologia diferenciada para um paradigma didático que enalteça o papel das provas e demonstrações no ensino da Matemática. Esta

nova abordagem deve ser acompanhada da conscientização de incluir, nas aulas de Matemática, atividades que favoreçam o desenvolvimento do raciocínio dedutivo dos alunos; aos professores deve ser dada oportunidade para adquirirem competência e habilidades para lidar com este novo processo de aquisição do conhecimento matemático. Professor que atua neste contexto precisa saber como orientar seus alunos sobre a importância do papel das provas e demonstrações matemáticas em uma perspectiva de orientá-los e de como e quando usar tais processos; o professor deve ter a conscientização de que para quebrar o paradigma atual do ensino da Matemática, muito deve ser mudado no panorama escolar. Algumas dessas mudanças podem ser realizadas pelo próprio professor; outras estarão sujeitas às vontades dos que estão na administração educacional.

Do acima exposto percebemos que existe uma extensa discussão sobre a utilização das provas e demonstrações no ensino da Matemática na Educação Básica. Em alguns países da Europa esta discussão está mais aprofundada tendo provas e demonstrações matemáticas inseridas no currículo da Educação Básica. No Brasil, este ainda é um tema que está sendo estudado por educadores matemáticos; na prática, as provas e demonstrações matemáticas se encontram quase que ausentes nas aulas em virtude de toda uma conjuntura que dificulta a utilização dessas ferramentas. Essas dificuldades vão desde a falta de conhecimento por parte do professore, de um modelo de ensino que privilegia uma Matemática pronta na qual fórmula matemática surge como um passe de mágica e os alunos devem memorizá-las para então aplicá-las e a forte ênfase que o professor dá ao livro didático que, por sua vez, adota um paradigma arraigado em uma Matemática pronta e acabada.

Doravante, buscamos explicar a caracterização de nossa pesquisa e as opções metodológicas que nos iluminaram no executar deste trabalho.

CAPÍTULO 2

ENSINO DA GEOMETRIA: UM CAMINHAR PARA AS PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Neste capítulo abordamos o ensino da Geometria na educação básica. Assim, trazemos autores que versam sobre a importância do ensino desta área da Matemática, suas características e sua importância. Discutimos os caminhos tomados pelo ensino da Geometria como uma área da Matemática desde a década de 60/70 até os dias atuais. Ao longo desta trajetória dissertamos sobre seu desenvolvimento histórico, dificuldades, importância, características e os possíveis contributos para a compreensão de sua importância na construção do conhecimento matemático.

2.1 O ensino da geometria e o da matemática

De início, trazemos um pouco de uma discussão que existe sobre o ensino da Geometria visando amenizar os aspectos que dificultam a compreensão desta ramificação da Matemática e que a mesma seja ensinada conjuntamente com outros assuntos matemáticos. Autores como Lorenzato (1995), Pavanello (1993), Kaleff (1994), afirmam que o ensino da Geometria acontece de forma desagregada das outras áreas da Matemática, acarretando obstáculo para sua compreensão. Esses autores ainda creditam que isto ocorre devido à falta de preparo dos professores de Matemática que ainda persistem em uma visão arraigada na Matemática Moderna. Perante toda esta discussão o ensino da Geometria ainda se dá de forma desunificada, sem possibilitar que os alunos enxerguem as ramificações que existem entre a Geometria e as demais ramificações da Matemática. Tanto nos documentos oficiais como os autores que estudam o ensino de Geometria, discordam desta forma de trabalhar, separando a Geometria das outras áreas da Matemática em virtude de uma série de dificuldades que fecunda um círculo vicioso. De acordo com Crescenti (2006, p. 27):

> A ampliação feita à ideia presente na Proposta Curricular (de “um conteúdo” para “uma área”) se deve ao fato de que, apesar de a Aritmética, a Álgebra e a Geometria, estarem presentes nos currículos dos níveis de escolaridade básica como áreas da Matemática, o que se tem encontrado é uma ênfase maior à Aritmética e à Álgebra. Embora a Geometria esteja contemplada de forma evidente nas propostas curriculares e, por isso, provavelmente, nos planos de ensino dos professores, esta orientação não garante que esteja sendo ensinada de maneira satisfatória.

A Geometria, como qualquer outra área da Matemática, está interligada por meio de objetos matemáticos que sustentam e alimentam umas às outras. Para Crescenti (2006) a Geometria é uma constante em nossa vida. Se observarmos onde estamos, no ambiente em que estamos inseridos perceberemos formas geométricas, a começar por objetos que usamos nas tarefas do nosso cotidiano e pelo planeta em que habitamos.

> A Geometria é uma área da Matemática que está muito presente na vida cotidiana. Basta olharmos ao nosso redor e perceberemos que estamos cercados de objetos que guardam relação com formas geométricas, objetos feitos com retas, curvas ou pela composição de ambas. Nós mesmos somos "seres geométricos", dotados de forma tridimensional. É uma área rica em aplicações práticas que podem auxiliar a resolver problemas que, muitas vezes, a Álgebra sozinha não dá conta (CRESCENTI, 2006. p. 28).

Em um sentido um pouco mais amplo, a Geometria contempla a investigação das formas e dimensões presentes nos entes matemáticos. A Geometria é "como corpo de conhecimento, a ciência que tem, por objetivo, analisar, organizar e sistematizar os conhecimentos espaciais. Pode-se considerar a Geometria como a Matemática do espaço" CATALÁ, (apud SÃO PAULO, 1991, p.33). A Geometria, porém, é também vivência pois "desencadeia no homem o pensamento voltado à realidade concreta (observar, descrever, comparar, tocar, construir). Trabalhar com Geometria é estabelecer relações, é interagir com o mundo que nos cerca" (SCHMITZ; LEDUR; MILANI, 1994, p.78).

Ensinar Geometria sem fazer relação com os exemplos citados acima empobrece sua compreensão e não desperta nos alunos o desejo de se aventurar em fazer relações da Geometria como o mundo que os cerca. Isto fortalece a ideia de abstração da Geometria e que ela é resumida ao conjunto de fórmulas sem nenhuma aplicabilidade. Esta desvalorização ao ensino desta área da Matemática acarreta grave problema que influencia, de forma direta, o processo de construção do conhecimento matemático e na formação intelectual dos alunos. Pavanello (1993) nos diz que este abandono não é exclusivo do Brasil; o mesmo acontece em outros lugares do mundo:

> Em vários países inúmeras pesquisas estão sendo realizadas procurando determinar o "que" ensinar de geometria e "como" fazê-lo. Grandes esforços têm sido empreendidos na capacitação de docentes, visando permitir-lhes realizar um trabalho de qualidade em relação a este tema (PAVANELLO, 1993. p 8).

O ensino da Geometria deve contemplar os aspectos que facilitam sua compreensão, como relacionar esta área da matemática com situações reais até porque

existem situações cotidianas em que a Geometria está inserida e não é percebida. Este ensino também deve fortalecer a ideia de que a Geometria é uma área da Matemática que está vinculada a outras áreas do conhecimento matemático. Sempre que possível se faz necessário que o aluno perceba a importância da Geometria para compreender situações vivenciadas por ele e sirva com viés para o entendimento da Matemática.

2.2 O ensino da geometria no Brasil

O problema do ensino da Geometria na educação básica brasileira vem inquietando os educadores há anos. Este é um problema que se torna mais evidente nas escolas públicas onde o ensino da Geometria é quase que inexistente ou quando existe é resumido a um conjunto de fórmulas. De acordo com Pavanello (1993) este problema se agravou a partir da lei 5692/71:

> A liberdade que esta lei concedia às escolas quando a decisão sobre os programas das diferentes disciplinas possibilitou que muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de incluí-la em sua programação. Por outro lado, mesmo dentre aqueles que continuaram a ensiná-la, muitos reservaram o final do ano letivo para sua abordagem em sala de aula – talvez numa tentativa, ainda que inconsciente, de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado com o tópico em questão (PAVANELLO, 1993. p 87).

Outro agravante citado por Pavanello (1993) ocorreu devido às mudanças sociais, política e econômicas que, no Brasil do século XX, foram bastante evidentes, além de uma nova visão dos processos metodológicos oriundos da França e dos Estados Unidos. Neste período o Brasil tinha sua sustentabilidade basicamente oriunda de sua produção agrícola comercializando os seus produtos vindos do campo, com países industrializados. Neste modelo agrícola, um grande número da população era analfabeta e apenas os filhos dos senhores feudais tinham acesso à educação de nível superior; esses pretendiam estudar os cursos na área jurídica pensando em ingressar em cargos oriundos do poder público.

Nesta visão, o ensino da Matemática acontecia de forma como se originou a Matemática, voltada para a resolução de problemas práticos do cotidiano:

> O ensino da Matemática na escola primeira é essencialmente utilitário: busca-se o domínio das técnicas operatórias necessárias à vida prática e às atividades comerciais. Com a mesma orientação se trabalham algumas noções de geometria (PAVANELLO, 1993. p 5).

Na educação básica brasileira o ensino da Geometria tem passado na visão de Lorenzato (1995) por diversas metamorfoses. Essas transformações afetam alunos, professores, autores de livros didáticos, educadores e pesquisadores, gerando forte ênfase aos aspectos formais de demonstrações baseadas no raciocínio lógico dedutivo, passando por uma forte valorização da algebrização e caminhando até o empirismo inoperante. Lorezanto (1995) caminha à luz das pesquisas de Pavanello (1993) e Perez (1991) afirmando que o ensino da Geometria brasileira não existe ou é ensinado em escala quase que inexistente.

De acordo com Lorenzato (1995) diversos fatores influenciam para ocasionar essa omissão no ensino da Geometria; dentre esses, dois se destacam com maior veemência: o professor que não possui domínio do conteúdo geométrico nem de uma metodologia que permita a realização de suas práticas escolares; a segunda é atribuída à demasiada importância que é dada ao livro didático, seja por falta de formação dos professores ou devido à sua pesada carga de trabalho.

Lorenzado (1995) ainda discutindo os problemas que impactam no ensino da Geometria cita como a Geometria é apresentada nos livros didáticos:

> Infelizmente em muitos deles a Geometria é apresentada apenas como conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou exemplificações de natureza histórica ou lógica; noutros, a Geometria é reduzida a meia dúzia de fórmulas banais do mundo físico. Como se isto não bastasse, a Geometria quase sempre é apresentada na última parte do livro, aumentando a probabilidade de ela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo (LORENZATO, 1995. p. 4)

Lorenzato (1995) cita diversos obstáculos aos quais o ensino da Geometria está submetido. Estas barreiras vão desde a falta de uma formação pedagógica do professor, à falta de conhecimentos do assunto, passando pela apresentação que o livro didático faz da Geometria, mas esses são apenas alguns problemas destacados por Lorenzato. Existem problemas dentro e fora do ambiente escolar que influenciam no processo de ensino e aprendizagem da Geometria. Na visão de Pavanello (1993) o problema do ensino da Geometria tem suas causas arraigadas nas décadas de 1930 e 1940, quando o Brasil e o mundo passaram por diversas transformações políticas, sociais e econômicas.

Toda esta problemática, discutida há décadas, ainda se faz presente em sala de aula nos momentos atuais. Houve pouca, ou nenhuma mudança no tocante ao ensino da Geometria. Ainda nos deparamos com aulas mortas, cujos alunos apenas reproduzem o que está no livro ou o que o professor ordena. No que diz respeito aos professores, os

mesmos são crias de uma Matemática dedutivista, com enfoque para a Álgebra e a Aritmética.

São distintos os obstáculos citados pelos professores quando questionados sobre os problemas enfrentados quando tentam ensinar Geometria. Dentre eles podemos citar alegações do tipo: *porque não sei*, *o tempo é curto*, *porque os alunos gostam mais de aritmética*, *porque os problemas são de contas*, entre outros. Podemos observar que em nenhum momento se colocam em xeque os méritos da Geometria e é notável que o professor não reflete sobre sua própria prática, não percebe que o modo como ele age está enraizado em sua formação. Isto pode acontecer, por exemplo, quando o professor tem conhecimento limitado sobre a Geometria e não conhece o seu potencial no desenvolvido do raciocínio dos alunos ou porque a Geometria exige uma forma de pensar diferente, ou seja, ter conhecimentos de Aritmética e Álgebra não é necessariamente suficiente para resolver problemas de Geometria (LORENZATO, 1993).

A demasiada valorização da Álgebra e da Aritmética faz com que seja natural que as pessoas, quando se deparam com questões de Geometria, necessitem de uma visualização ou um raciocínio mais aprofundado, que não envolve dados algébricos ou aritméticos. Com isto, não sabem como agir e se explicam alegando que os dados não são algébricos ou aritméticos, e por isso dificultam o entendimento:

> Isso denota uma forte tendência que a nossa Educação Matemática tem imprimido aos alunos: a de aritmetização do raciocínio. Em problemas geométricos em que não aparecem números e/ou medidas, não existirão contas a fazer; os problemas necessitam de uma leitura diferente, um novo olhar, uma nova forma de pensar; é preciso ter uma percepção geométrica, raciocínio geométrico e linguagem geométrica (LORENZATO, 1993. p. 5).

Esta falta de visualização e pensamento geométrico acontece porque nas aulas de Matemática os alunos não estão aprendendo a raciocinar dedutivamente (NASSER; TINOCO, 2003). Não são desenvolvidos elementos essenciais na formação do pensamento lógico dedutivo; os alunos não são colocados para pensar geometricamente para desenvolver uma nova percepção geométrica. Esses aspectos não são, ou pouco são, desenvolvidos nas aulas de Matemática devido a toda uma problemática discutida anteriormente que vem impedindo o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos (LORENZATO, 1993).

2.3 O pensamento geométrico e os níveis de Van Hiele

Para a compreensão de como este pensamento geométrico ocorre e pode ser desenvolvido, o casal Van Hiele desenvolveu pesquisas bastante enriquecedoras, nas quais, a tese de Pierre Van Hiele enfoca as dificuldades dos alunos no aprendizado da Geometria explorando um caráter explicativo e descritivo, paralelamente aos estudos realizados por Dina Van Hiele, que abordavam um experimento educacional tendendo para um caráter prescritivo, ordenando o conteúdo da Geometria e atividades de aprendizado dos alunos (DE VILLIERS, 2010). Este autor enfatiza que o ponto mais importante desta teoria é a diferenciação de cinco níveis de pensamento relacionados ao desenvolvimento do entendimento dos alunos em relação à geometria.

Quanto à compreensão dos alunos com a Geometria, Nasser (1990) afirma que os professores da educação básica sempre observam que quando os conteúdos abordados envolvem conceitos geométricos um número considerável de alunos apresenta dificuldades destacando-se as dificuldades oriundas do raciocínio dedutivo e em demonstrações. A teoria do casal Van Hiele é nas palavras de Nasser (1990) a que melhor explica o problema com o processo de ensino e aprendizagem da Geometria. Abordando esta problemática, De Villiers (2010) diz que:

> Os Van Hiele atribuíram a principal razão da falha do currículo de geometria tradicional ao fato de que o currículo era apresentado em nível mais alto do que os alunos, ou seja, eles não conseguiam entender o professor e o professor não conseguia entender o porquê deles não conseguiam entender (DE VILLIERS, 2010. p 401)

É primordial que o professor entenda e busque solucionar, ou amenizar, as dificuldades dos alunos em relação à compreensão da Geometria. Um primeiro caminhar seria desenvolver métodos para conhecer a deficiência dos alunos e como eles desenvolvem seus pensamentos. O modelo Van Hiele consiste em cinco níveis de compreensão que explicam como acontece a evolução do aluno no entendimento da Geometria:

Nível 0: Básico

Neste nível inicial os alunos têm uma percepção generalizada dos objetos observados, ou seja, veem o espaço apenas como algo que existem em torno deles. O aluno reconhece as figuras geométricas por sua aparência global, mas não visualizam que nesses elementos existem componentes e propriedades. Nasser (1990) diz que o aluno identifica a figura de um quadrado e quando indagado por que a resposta é do

tipo: “porque se parece com um”. Os alunos identificam triângulos, quadrados, paralelogramos, entre outros, através de sua aparência e não por meio de propriedades (DE VILLIERS, 2010).

Crowley (1994) cita que no Nível 0 os alunos têm condições de aprender um vocabulário geométrico, identificar formas específicas e são capazes de reproduzir uma figura tendo, como base, outra figura dada. Por exemplo, os alunos que se encontram neste nível conseguem diferenciar ou reconhecer quadrados e retângulos mas não são capazes de deduzir que os quadrados e retângulos possuem ângulos retos e os lados opostos são paralelos.

Nível 1: Análise

Neste nível, Crowley (1994) relata que se inicia uma análise dos conceitos geométricos e os alunos começam a diferenciar as peculiaridades das figuras:

> ... por exemplo, através da observação e da experimentação os alunos começam a discernir as características das figuras. Surgem então as propriedades que são utilizadas para conceituar classes de configurações. Assim, reconhecem que as figuras têm partes e as figuras são conhecidas por suas partes (CROWLEY, 1994. p. 3).

Ainda em relação ao Nível 1, os alunos conhecem e analisam as propriedades das figuras sem fazer relação entre as mesmas e suas propriedades. Como exemplo, Nasser (1990) diz que o aluno reconhece um quadrado através dos quatros lados iguais e dos quatros ângulos iguais.

Nível 2: Dedução Informal

Neste nível, os alunos já relacionam as figuras de acordo com suas propriedades, porém não estão ainda dominando o processo dedutivo como um todo ou o papel dos axiomas. Para Crowley (1994, p. 3):

> Neste nível os alunos conseguem estabelecer inter-relações de propriedades tanto dentro de figuras (por exemplo, num quadrilátero, se os lados opostos são paralelos, necessariamente os ângulos opostos são iguais) quanto entre figuras (um quadrado é um retângulo porque tem todas as propriedades de um retângulo); assim, eles são capazes de deduzir propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras...

Nível 3: Dedução

Neste Nível, o pensamento geométrico do aluno já se encontra desenvolvido o suficiente para compreender o processo dedutivo. A recíproca de um teorema, as condições necessárias e suficientes, mas não sente a necessidade de usar o rigor

matemático, ou seja, o aluno não vê a necessidade de demonstrar o que para ele parece óbvio (Nasser, 1990). Crowley (1994) confirma esta evolução:

> Neste nível se compreende o significado da dedução como maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático. São percebidos a inter-relação e o papel de termos não definidos, axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações. Neste nível a pessoa é capaz de construir demonstrações e não apenas de memorizá-las; enxerga a possibilidade de desenvolver uma demonstração de mais de uma maneira; compreende a interação das condições necessárias e suficientes; é capaz de fazer distinções entre uma afirmação e sua recíproca (CROWLEY, 1994. p. 4).

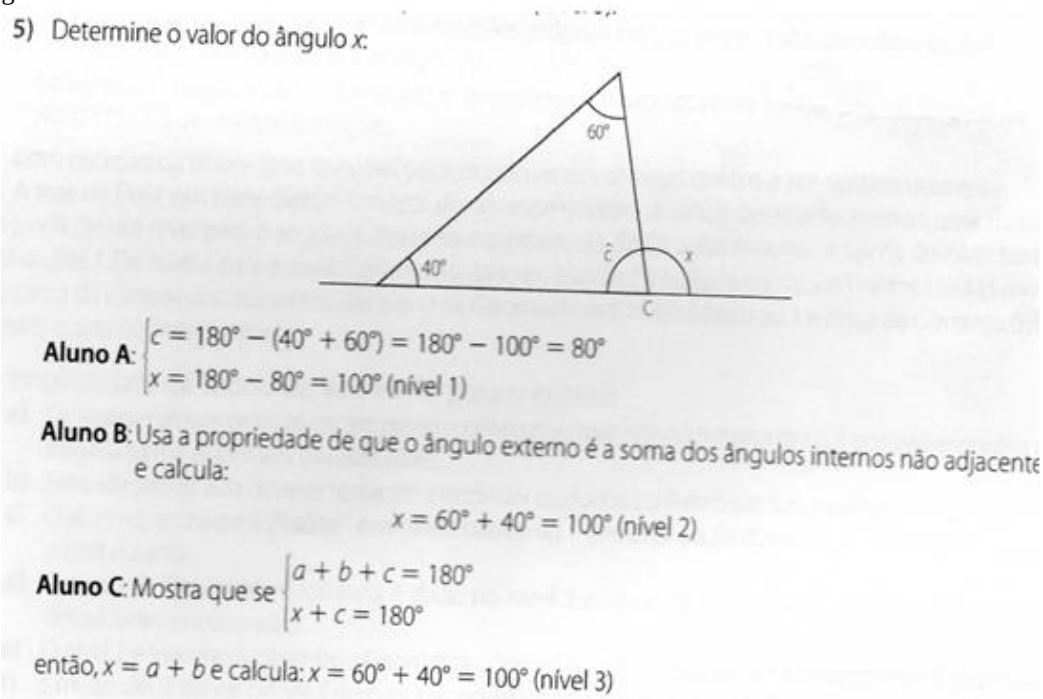
Nível 4: Rigor

Ao atingir o Nível 4, os alunos já se encontram com o pensamento geométrico desenvolvido o suficiente para compreender a importância do rigor e das demonstrações, como também estão aptos a analisar outras geometrias (NASSER, 1990).

Crowley (1994) complementa, dizendo que neste estágio vários sistemas axiomáticos podem ser estudados pelos alunos e que os mesmos têm uma visão mais complexa, vendo a Geometria no plano abstrato e fazem comparações entre a Geometria Euclidiana e outras Geometrias.

Nasser (1990) esboça situações do comportamento de alunos, de acordo com o seu nível desenvolvimento:

Figura 1 - Procedimentos de resolução adotados de acordo com o nível de desenvolvimento geométrico de Van Hiele.



Na Figura 1, Nasser (1990) mostra o procedimento adotado pelo aluno de acordo com os níveis de Van Hiele.

No paradigma atual o ensino da Geometria não oferece condições, como a mostrada na Figura acima, para que os alunos desenvolvam seu raciocínio dedutivo e compreendam os temas que estão sendo abordados. Este modelo de ensino está arraigado nas aulas de Matemática devido a uma forte adesão ao livro didático, ao contrato didático e à péssima formação dos professores de Matemática (LORENZATO, 1993; PAVANELLO 1993). De acordo com De Villiers (2010) as aulas de matemática são ministradas através da passagem de instruções para que os alunos a repetiam em exercícios ou avaliações.

Tradicionalmente, a maioria dos professores e autores de livros escolares simplesmente fornece aos alunos conteúdo pronto (definições, teoremas, comprovações, classificações, etc) para que eles meramente tenham de assimilá-los e regurgitá-los em testes e provas. Esse tipo de ensino tradicional de geometria pode ser comparado a uma aula de culinária na qual o professor simplesmente fornece a receita e os alunos a reproduzem; é o que está acontecendo atualmente, no ensino da Geometria, pois o mesmo não atua no sentido de promover níveis estruturados do pensamento matemático, deixando de atingir suas várias finalidades, dentre elas a de fazer com que os alunos passem de uma geometria de observação para uma geometria de demonstração (PARZYSZ, 2006):

> mostra aos alunos bolos (ou pior, apenas fotos de bolos) sem jamais mostrar a eles o que vai dentro do bolo e como ele é preparado. E mais: eles mesmos têm a oportunidade de tentar cozinhar por si próprios (DE VILLIERS, 2010. p 411).

Para combater esta falha no ensino da Geometria a teoria de Van Hiele explica a evolução do pensamento geométrico dos alunos e também oferece condições para a preparação de materiais que favoreçam a passagem de nível, de modo que ocorra a compreensão por parte dos alunos e não um treinamento.

Para atestar a importância do ensino da Geometria nas aulas de Matemática podemos citar as teses defendidas por Pavanello (1993) e Lorezanto (1993). Esses autores seguem a linha de pensamentos que traduz a Geometria como uma ferramenta crucial para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, permitindo-lhes caminhar na busca pela compreensão da relação existentes em seu habitat. Para Lorenzato (1993):

> Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e sem esta habilidade elas dificilmente conseguirão resolver as situações da vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano (LORENZATO, 1993. p. 5).

Diante da importância do ensino da Geometria para a formação do aluno, torna-se necessário que o professor mude suas concepções e busque utilizar toda a riqueza e potencialidades oferecidas pela Geometria. Para isto ele deve adentrar em uma nova concepção que lhe permita agregar subsídios para uma metodologia que provoque e desperte, nos alunos, o interesse em estudar a Geometria como ferramenta que lhe permitirá avançar para a compreensão dos fatos que ocorrem em sua volta e relacionar a Geometria com as formas e objetos matemáticos que lhe são apresentados.

2.4 Demonstrações no ensino da geometria

O papel que as demonstrações das propriedades geométricas têm no processo de ensino e aprendizagem da Geometria é uma linha de pesquisa que se desenvolveu dentro dos estudos sobre o ensino e a aprendizagem da geometria. Neste panorama procura-se mostrar os caminhos desenvolvidos nos últimos anos levando-se em consideração aspectos como o papel da prova em educação matemática e aprendizagem de geometria e o uso da tecnologia no ensino da Geometria, em especial os programas de geometria dinâmica (FERNÁNDEZ, 2003):

> El fracaso de laenseñanza de lageometríaenlaeducaciónproviene, al menos parcialmente, de una falta de reconocimiento de esta complejidadsubyacente a laprueba: lapráctica tradicional era simplemente presentar lapruebadeductiva formal sin atender a sufunción o a cómopuede conectar conlasintuiciones de losestudiantes acerca de lo que puede ser un argumento convincente: “lodeductivo no se enseñaba como reinvención, como hizo Sócrates, sino que era impuesto sobre el aprendiz” (FREUDENTHAL, 1973, apud FERNÁNDEZ, 2003, p. 2).

A Geometria possibilita um vasto campo a ser explorado para amenizar a visão cartesiana da Matemática e tomando rumos para extinguir este caráter ilusório de que o processo de provar e demonstrar matematicamente fica destinando, para mentes, brilhantes pessoas com superpoderes. A Geometria é tida como a primeira área do saber matemático que procurou se organizar de modo a obedecer a uma lógica dedutiva procurando demonstrar suas propriedades. Partindo do ponto de vista de que a Geometria oferece condições para desenvolver o raciocínio dedutivo dos alunos e

introduzir as provas e demonstrações na educação básica, diversos trabalhos abordam esta linha de pensamento, como Crescenti (2005); Frant (2001); Busquini; Santos (2011); Amouloud (2010); Ferreira (2008).

Essas pesquisas apontam que o ensino da Geometria, dentro de suas potencialidades, pode ser um limiar para uma nova atuação dos alunos em relação ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Esta área da Matemática pode fazer com que os alunos viagem até o campo das provas e demonstrações matemáticas. Este caminhar deve ser desenvolvido através de vários níveis de evolução levando em consideração que a capacidade de visão geométrica dos alunos é maior que sua habilidade de trabalhar com números (ALMOULOUD, 2010):

> Ao reforçar este potencial, o professor está despertando o interesse pela Matemática promovendo progressos em relação à compreensão dos números e suas operações. O aluno é um ente geométrico mergulhado no espaço e acha interessante, com a ajuda da Geometria, poder representar e descrever, de maneira ordenada, o mundo no qual ele vive (ALMOULOUD, 2010, p. 1).

A Geometria permite os primeiros contatos dos alunos com as demonstrações oferecendo um campo vasto de atividades que leve o aluno a raciocinar dedutivamente e construir um texto matemático que seja aceito de acordo com sua idade e série:

> Os problemas em Geometria constituem, geralmente, do domínio dos primeiros encontros dos alunos com as exigências da demonstração. Quando se vê o que contém a atividade demonstrativa nos problemas da Geometria, percebe-se que o raciocínio dedutivo constitui uma das tarefas decisivas. A utilização de definições e teoremas já destaca esta prática (ALMOULOUD, 2010. p 1).

Almouloud (2010) diz que é através da Geometria que os alunos têm seu primeiro contato com as provas e demonstrações matemáticas, contato este que na maioria das vezes passa despercebido pelos alunos por motivos pelo qual o professor atribui uma série de dificuldades, dando ênfase à compreensão apenas das fórmulas para a utilização na resolução dos exercícios.

De acordo com Parzysz (2006) o ensino da Geometria na educação básica tem como finalidade fazer com que os alunos migrem de uma geometria de observação para uma geometria de demonstração. Isto fica claro quando Hanna (2000) afirma que a Geometria oferece um campo bastante rico para trabalhar a iniciação dos alunos no processo de provas e demonstrações matemáticas. Pais (2013) diz que os conceitos geométricos podem ilustrar preposições e teoremas citando como exemplo o Teorema de Pitágoras.

Para desfrutar dessas essências oferecidas pela Geometria, o professor deve atuar contribuindo com situações que desenvolvam a habilidade da expressão oral para que os alunos comecem a comunicar, justificar e explicar suas ideias, oferecendo-lhes momentos que possam ser utilizados para discutirem estratégias, erros e acertos. Esses momentos devem ser utilizados com mais frequências no processo de ensino e aprendizagem de Matemática aproveitando o fato de que a Geometria possibilita a utilização de recursos visuais. Atuando nesta perspectiva, o aluno ira sentir-se à vontade para debater, opinar e esclarecer suas construções contribuindo para uma formação mais independente construindo um pensamento geométrico mais elaborado e organizado para que, assim, o nível de conhecimento geométrico adquirido na educação básica e que seja um elemento fortalecedor para a amenização das dificuldades ao adentrarem na universidade (NASSER; TINOCO, 2011).

Enquanto houver um distanciamento entre o que o aluno pensa e o que ele escreve, também haverá obstáculos para que os alunos percebam que a Geometria oferece condições para que possam compreender que, partindo de situações intuitivas, podem trilhar até alcançar os processos de demonstrações formais (NASSER; TINOCO, 2011).

Parzysz (2006) elaborou sustentado por estudos Van Hiele, um quadro que enfoca a articulação entre esses níveis:

Quadro 1 - Articulação entre os níveis de pensamento geométrico.

	Geometrias não axiomáticas		Geometrias axiomáticas	
Tipo de geometria	Concreta	Spatio-graphique	Proto-axiomática	Axiomática
	(G0)	(G1)	(G2)	(G3)
Objetos	Físicos		Teóricos	
Validações	Perceptivo-dedutivos		Hipotéticos-dedutivos	

Fonte: extraído de Parzysz (2006)

Os trabalhos de Van Hiele e de Parzysz têm sua inicialização no processo de visualização, do concreto, de elementos que podem ser vistos manipulado ou construídos pelos alunos. Partindo deste princípio tende-se não envolver a axiomatização, que acontece gradualmente com as passagens dos níveis. É importante salientar que os alunos não se deparam com algo pronto; eles começam a fazer suas conjecturas através da observação e vão lapidando até a criação de um pensamento

geométrico mais elaborado e sistematizado que, de acordo com Van Hiele, obedece a algumas propriedades que podem orientar os professores na tomada de decisões; essas generalidades são:

- ✓ Sequencial – Para que o aluno se desenvolva bem no próximo nível é necessário que ele tenha assimilado bem o nível anterior;
- ✓ Avanço – O progresso ou fracasso de um nível para o outro depende mais dos conteúdos ou métodos utilizados do que da idade;
- ✓ Intrínseco e extrínseco – objetos inerentes a um nível se tornam os objetos que serão estudados no próximo nível.
- ✓ Linguística – Cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos, ou seja, uma relação que é correta em certo nível pode ser modificada em outro;
- ✓ Combinação inadequada – Aluno e curso devem estar falando a mesma língua, ou seja, ambos devem estar no mesmo nível; caso contrário, o aprendizado e o progresso desejados podem não ser satisfatórios (CROWLEY, 1994).

Percebemos que ao primeiro item é dada toda importância a uma geometria real, concreta que existe no mundo real dos alunos. A partir daí, se inicia observações e testes empíricos uma evolução que permite abstração e formalização dos conceitos geométricos.

Os trabalhos desenvolvidos por Van Hiele e Parsysz podem ser trazidos para o que autores, como Hanna e Balacheff defendam, em relação à introdução de provas e demonstrações matemáticas na educação básica. De acordo com esses autores, tal introdução deve ser feita levando-se em consideração a idade dos alunos e a série com o nível de rigor aumentando gradativamente.

Nas palavras de Usiskin (1994) a Geometria pode ser abordada mediante quatro importantes aspectos:

- ✓ A Geometria como estudo do mundo real, físico;
- ✓ A Geometria como veículo para representar outros conceitos matemáticos;
- ✓ A Geometria como exemplo de um sistema matemático;
- ✓ A Geometria como visualização, construção e medida de figuras.

Abordada desta forma, a Geometria deixa de ser um objeto matemático que, na visão de Lorenzato (1995) tem seu ensino reduzido a um conjunto de fórmulas.

Trabalhar com Geometria é permitir, ao aluno, uma visão sistematizada do mundo em que ele vive. Em nosso meio estamos cercados de objetos que podem ser representados através da Geometria e que, na maioria das vezes, não fazemos relações desses objetos com a Matemática ou com a própria Geometria. A falta deste olhar crítico acontece por motivos pelos quais o ensino da Geometria é feito, não permite ao aluno fazer relações do que ele estuda com o mundo à sua volta. Acreditamos que com

o ensino de Geometria seja possível desenvolver no aluno esse olhar crítico, fornecendo a ele condições de visualizar, organizar, abstrair, conjecturar e desenvolver seu raciocínio lógico dedutivo para que possa fazer relação da Geometria como o que ele observa no seu dia-a-dia (SCHMITZ; LEDUR; MILANI, 1994).

Frant (2001) corrobora afirmando a importância da Geometria para a compreensão do mundo e o desenvolvimento dos alunos na construção do seu conhecimento, dinamizando o processo de relação da Geometria com atividades matemáticas:

> A Geometria pode ser vista como o estudo das formas e do espaço, de suas medidas e de suas propriedades. Os alunos descobrem relações e desenvolvem o senso espacial construindo, desenhando, medindo, visualizando, comparando, transformando e classificando figuras. A discussão de ideias, o levantamento de conjeturas e a experimentação das hipóteses, precedem das definições e do desenvolvimento de afirmações formais. A exploração informal da Geometria pode ser motivadora e matematicamente produtiva, nos primeiros ciclos do Ensino Fundamental. Nesta etapa o ensino de Geometria deve recair sobre a investigação, o uso de ideias geométricas e relações, ao invés de se ocupar com definições a serem memorizadas e fórmulas a serem decoradas (FRANT, 2001. p. 4)

O ensino da Geometria, na visão de Frant (2001), também possibilita a abertura para a criação de um pensamento autônomo, correlacionado com autoconfiança dos alunos em argumentar seus feitos:

> Trabalhando o pensamento geométrico estaremos contribuindo para a aprendizagem de números e medidas. As atividades geométricas, como outras em Matemática, permitem também, ao aluno, identificar regularidades, buscar semelhanças e diferenças, argumentar a favor ou contra, fazer conjeturas (FRANT, 2001. p. 4).

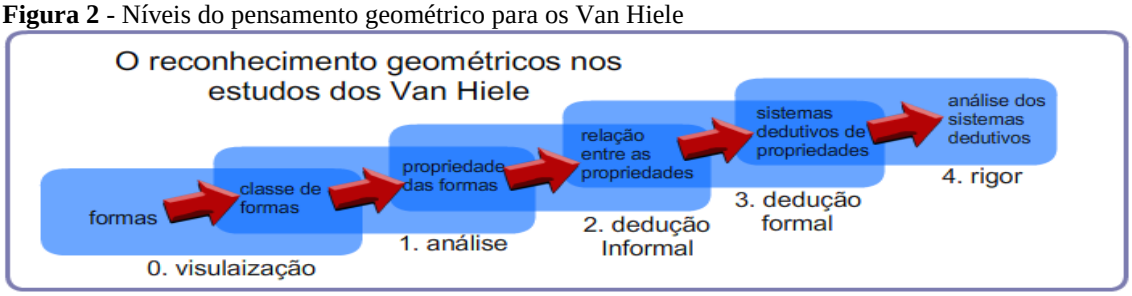
A Geometria oferece um espaço para que os alunos tenham acesso à resolução de problemas que exijam visualização, interpretação, propriedades, definições e organização do raciocínio. Esses elementos vão fortalecer a entrada dos alunos no mundo das provas e demonstrações geométricas. De acordo com Brasil (1998), resolvendo problemas geométricos os alunos terão contato inicial com a organização e as regras envolvidas em um raciocínio dedutivo.

O ensino da Geometria, além de objeto de estudo, abre caminhos para outros ramos da Matemática e permite a utilização de figuras geométricas que, de acordo com os PCN, contribuem para uma observação mais detalhada que leve o aluno a formular suas conjecturas enveredando para a busca de provas.

2.5 Demonstrações matemáticas e o pensamento geométrico

Nos estudos de Van Hiele encontramos características que podemos associar com o processo de demonstrar matematicamente. Van Hiele aponta para 5 níveis de conhecimento geométrico com características de hierarquização em que os produtos de pensamento em cada nível servem como alicerce para o próximo nível (WALLE, 2009, p. 443):

Figura 2 - Níveis do pensamento geométrico para os Van Hiele



Fonte: Figura elaborada por John A. Van de Walle (WALLE, 2009, p.443).

Van Hiele nos leva ao entendimento de que a evolução entre os níveis de pensamento é ocasionada por meio de experiências enumeradamente planejadas, destacando o papel do professor, atribuindo-lhe a função de elaborar e ordenar as atividades que o aluno deve vivenciar para progredir de um nível a outro. O paradigma elaborado por Van Hiele possui aproximação com a habilidade de justificar em Matemática. Nos níveis 0 e 1, os alunos se baseiam nas formas e na visualização, o que permite certo grau de obviedade. Portanto, para eles não existe a necessidade de provar o que lhes parece óbvio (NASSER; TINOCO, 2003). No nível 3, para Walle (2009), os objetos de pensamentos são as relações entre as propriedades dos objetos matemáticos. Para Nasser; Tinoco (2003) atividades elaboradas no sentido de estender habilidades em argumentação e provas contribuem para o acesso ao terceiro nível.

Hanna (1995) sustenta que os níveis de uma demonstração também possam ser classificados e validados de acordo com a evolução do aluno. Para esta autora a construção do pensamento dedutivo se inicia a partir de situações simples em que não seja levando em consideração todo o rigor matemático.

Baseados neste esquema, Galbraith (1981 apud Nasser; Tinoco, 2003), enumeram uma série de motivos pelos quais o professor deve desenvolver atividades que enalteçam a argumentação nas aulas de Matemática. Esses componentes são importantes para o entendimento, elaboração e avaliação de provas:

> ✓ Entender e ser capaz de checar uma variedade de casos particulares;
> ✓ Detectar e utilizar um princípio externo relevante para a argumentação;
> ✓ Utilizar uma cadeia de inferências a fim de se convencer do resultado a ser alcançado;
> ✓ Reconhecer o domínio de validade de uma generalização;
> ✓ Interpretar corretamente condições e afirmativas;
> ✓ Apreciar e perceber a distinção entre implicação e equivalência;
> ✓ Reconhecer a arbitrariedade e propriedades de uma definição;
> ✓ Ser capaz de analisar uma prova como meio de expor os detalhes de um argumento.

Nas palavras de Nasser; Tinoco (2003) competências como essas servem para fortalecer o pensamento de que os alunos devem ser preparados para dominar o raciocínio dedutivo para só assim poderem argumentar de forma satisfatória. Ainda para essas autoras, tais habilidades são adquiridas aos poucos, ou seja, nada de imediatismo. A evolução se dá de acordo com a maturidade dos alunos; elas ainda afirmam que o professor tem papel primordial e deve estar consciente de que precisa elaborar em suas aulas de Matemática, atividades que permitam ao aluno desenvolver as habilidades citadas acima.

De acordo com os estudos de Nasser; Tinoco (2003) verifica-se que se faz necessário acompanhar o aluno a elaborar seu pensamento lógico e trabalhá-lo para dominar o processo dedutivo. Como dito anteriormente, a habilidade de argumentar deve ser desenvolvida com o passar dos anos de escolaridade utilizando-se de diversos tipos de atividades, como jogos, problema-desafio ou simplesmente se exigindo justificativa para todas as respostas (NASSER; TINOCO, 2003, p. 9):

> Nas séries iniciais a criança é mais espontânea e consegue explicar seu raciocínio oralmente, com naturalidade. Conforme os anos vão passando, essa espontaneidade diminui e o aluno não consegue justificar suas soluções oralmente nem por escrito. Portanto, a habilidade de argumentar deve ser trabalhada desde as primeiras séries para que o aluno mais tarde seja capaz de defender um ponto de vista próprio, seja numa conversa informal seja numa questão de matemática.

Como dito anteriormente, nas palavras de Nasser; Tinoco (2003) os alunos das escolas brasileiras não estão sendo incentivados a pensar, racionar e agir logicamente ao estudar diversos conteúdos matemáticos. Tomando foco nesta afirmação, o grupo de estudos do Projeto Fundão do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro utilizou estratégias que mostraram eficiência no desenvolvimento da habilidade de argumentação em turmas a partir da 5ª série do Ensino Fundamental:

> ✓ Após tentar resolver uma tarefa individualmente e de ouvir a explicação do professor, os alunos trabalham em grupos, discutindo soluções para o mesmo problema;
> ✓ Os alunos avaliam justificativas apresentadas por outros;
> ✓ Problemas do tipo desafio, que requerem raciocínio lógico, são sempre propostos, independentemente do tópico que esteja sendo abordado;
> ✓ O mesmo problema é proposto tanto a estudantes que lá aprenderam o conteúdo matemático correspondente, como aqueles que ainda não adquiriram esse conhecimento a fim de evitar o uso de algoritmos ou fórmulas;
> ✓ O computador é usado (geometria dinâmica) para verificar se uma afirmativa é verdadeira ou falsa; depois de convencidos da verdade (ou não), os alunos são levados a justificá-la, ou a procurar um contra-exemplo;
> ✓ Atividades que ajudam a diferenciar a hipótese da tese de uma afirmativa têm sido usadas em cursos de formação de professores e de especialização (NASSER; TINOCO, 2003. p 9)

A importância desta área da Matemática para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo não deve ficar em segundo plano, mas deve ser entendida e trabalhada como alicerce para a construção do saber matemático que ultrapasse obstáculos que impedem sua compreensão.

O ensino da Geometria deve ocupar o seu lugar de destaque no ensino e na aprendizagem de Matemática. Os professores não podem privar o aluno de ter acesso a esta área do conhecimento e, sim, propor situações que enalteçam o uso dos conceitos geométricos e levem os alunos a viajar para um mundo de descobertas, explorando todas as suas potencialidades e enriquecendo as aulas de Matemática para que elas despertem nos alunos, o gosto de estudar Matemática.

CAPÍTULO 3:

METODOLOGIA DA PESQUISA

As alternativas metodológicas aplicadas na elaboração da pesquisa são trazidas neste capítulo, iniciando por aportes teóricos que caracterizam o paradigma de pesquisa que desenvolvemos com a intenção de fundamentar os métodos empregados para sua execução. Logo após, regressamos ao problema que nos direcionou durante todo o desenvolver da pesquisa; em seguida, retornamos aos objetivos esperados e também evidenciamos outras peculiaridades envolvidas no nosso trabalho. Concluímos descrevendo como se deu a seleção dos participantes, como também as atividades propostas e explanamos quais foram os meios utilizados para coletar os dados e quais os artifícios empregados em sua apreciação.

3.1 Pesquisas qualitativas

Ao término do século XIX a pesquisa qualitativa veio com nova metodologia para o entendimento dos fenômenos socais e provocaram críticas ao positivismo reducionista originando controvérsias à ideia de matematizar os fenômenos sociais e humanos (GAMBOA, 2003). O positivismo tratava esses fenômenos como se fossem objetos físicos excluindo a subjetividade e enfatizando a quantificação oriunda das ciências analíticas. Partindo deste pressuposto iniciou-se nova metodologia que tratava, de forma subjetiva, os fenômenos, ou seja, levava em consideração o ponto de vista do indivíduo de acordo com as interferências culturais, educacional e religiosa com o objetivo de analisar como o indivíduo vê, pensa e sente.

Neste mesmo caminhar Bogdan; Biklen (1994) afirmam que a representação numérica não é preocupação da pesquisa qualitativa; esta metodologia de pesquisa busca compreender profundamente o caso estudado:

> Os pesquisadores que adotam a abordagem qualitativa se opõem ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências já que as ciências sociais têm sua especificidade, o que pressupõe uma metodologia própria (BOGDAN; BIKLEN, 1994. p. 48).

A necessidade de nova abordagem metodológica para compreensão dos fenômenos sociais e humanos permitiu, aos pesquisadores, entrar em uma nova metodologia sustentada pela subjetividade, levando em consideração toda a esfera

envolvida no estudo, desvinculando o caráter matemático e objetivo do universo estudado (FLICK, 2004; GAMBOA, 2003):

> A nova abordagem prima pela compreensão dos fenômenos nas suas especificidades históricas e pela interpretação intersubjetiva dos eventos e acontecimentos. Este novo procedimento foi sendo conhecido como método qualitativo (GAMBOA, 2003, p. 394)

Os procedimentos qualitativos utilizados procuram explicar o porquê das coisas. Bogdan; Biklen (1994) citam as características que são pertinentes ao paradigma qualitativo; esses autores descrevem essas particularidades para mostrar que, levando em conta as diferenças, qualquer investigação está por fim interligada com o modelo qualitativo. Os autores ainda afirmam que em alguns casos as pesquisas desenvolvidas são desprovidas de algumas dessas características e que nem todos os estudos considerados qualitativos envolvem todas essas características. De início, esses autores afirmam que a obtenção dos dados ocorre no ambiente natural e tem, no pesquisador, seu instrumento principal para a coleta de dados. De acordo com Costa (2011) em uma pesquisa qualitativa o pesquisador deve estar inserido no ambiente em que pretende desenvolver a pesquisa. É neste local que o pesquisador obterá sua maior fonte de dados. Esta autora ainda afirma que, em se tratando de pesquisa educacional, os ambientes escolares são espaços ricos para a obtenção dos dados e permite a execução de vários estudos de campo (COSTA, 2011). De acordo com Bogdan; Biklen (2004):

> Os pesquisadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser mais bem compreendidas quanto são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência (BOGDAN; BIKLEN, 2004. p 48).

A segunda característica, citada por Bogdan; Biklen (1994) explica que a pesquisa qualitativa é de cunho descritivo, ou seja, os dados obtidos não são representados através de números; esses são obtidos por meio de imagens e texto e registrados levando em consideração toda a sua extensão e particularidades:

> Na busca do conhecimento os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda sua riqueza respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que esses foram registrados ou transcritos (BOGDAN; BIKLEN, 2004. p 48).

Na terceira característica Bogdan; Biklem (1994) afirmam que na execução de uma pesquisa qualitativa o principal interesse dos pesquisadores é o de entender o processo, ou seja, os pesquisadores buscam compreender, como um todo, o

acontecimento de um determinado fenômeno; para esses autores os resultados ou produtos ficam em segundo plano. Para Costa (2011):

> Os resultados finais obtidos em uma pesquisa de cunho qualitativo não constituem o foco central do pesquisador, mas o curso dos acontecimentos, isto é, a maneira pela qual se chegou aos resultados (COSTA, 2011. p. 61)

Outra característica atribuída por Bogdan; Biklen (2004) para a pesquisa qualitativa é que a análise dos dados é feita de forma indutiva, ou seja, os pesquisadores não têm o intuito de recolher os dados para confirmar ou contrariar hipóteses formuladas anteriormente:

> ...as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos vão se agrupando (BOGDAN; BIKLEN, 2004. p 48).

Bogdan; Biklen (1994) finalizam dizendo que na pesquisa qualitativa o significado é de vital importância. Os pesquisadores que adotam este modelo de pesquisa estão interessados em compreender como os elementos de uma sociedade atribuem significados às suas vidas. Os pesquisadores qualitativos têm sua preocupação voltada para o que se domina perspectiva participante, tais como quais são as hipóteses que as pessoas formulam sobre suas vivências:

> Ao aprender as perspectivas dos participantes a investigação qualitativa faz luz sobre a dinâmica interna das situações, dinâmica esta que é frequentemente invisível para o observador exterior (BOGDAN; BIKLEN, 19994, p. 51).

Ao caminharmos no sentido de compreender as particularidades que norteiam a pesquisa qualitativa e como esta se desenvolveu no âmbito educacional, nos deparamos com a dialética que desencadeou o processo de pesquisa qualitativa. Costa (2011) relata que na história da pesquisa em educação pesquisar era uma atividade que ficava voltada em adotar uma teoria específica, coleta de dados obtidos através da aplicação de questionários que seriam elaborados através de procedimentos estatísticos para realizar estimativas para depois chegar a alguma conclusão.

Para Gamboa (2003) tratar os fenômenos humanos e sociais como fossem objetos físicos tornou-se motivo de críticas devido ao reducionismo positivista (GAMBOA, 2003):

> Surge uma rica controvérsia sobre os limites do positivismo devido ao seu reducionismo quantitativo e à exclusão da subjetividade na sua pretensão de rigor matemático e de objetividade, contidos na receita de tratar os fenômenos sociais e humanos como se fossem objeto físicos. Daí a

> necessidade de alternativas metodológicas a essa pretendida física social ou às formas de "matematizar os atos humanos e sociais (GAMBOA, 2003. p. 394).

Para Van Zanten (2004) os métodos qualitativos foram criados para trabalhar com as classes marginalizadas da sociedade. Os grupos formados por ladrões, prostitutas, viciados e delinquentes, eram utilizados em maiores números pelos estudos da Escola de Chicago:

> A sociologia conserva uma grande tradição de trabalhar com os grupos marginalizados, mas esse não geralmente o caso da Sociologia da Educação e da Sociologia em geral (VAN ZANTEN, 2004. p. 26).

As estratégias que melhor consolidam a pesquisa qualitativa são aquelas que se inserem em contexto de observação participante e entrevista profunda, Bogdan; Biklem (1994). De acordo com Van Zanten (2004), o pesquisador deve estar atento para a relação existente entre ele e os participantes da pesquisa. No desenvolver do estudo vai existir uma relação denominada, por Van Zanten (2004) de relação de poder. Existem dois cenários citados por Van Zanten (2004); no primeiro, o pesquisador se depara com uma situação onde os participantes pesquisados podem sentir-se dominados em virtude de sua classe social menos favorecida deixando o pesquisador em situação vertical devido à sua posição de superioridade intelectual e social. Em outro cenário, o pesquisador se encontra em um meio em que os participantes da pesquisa pertencem a uma classe social mais abastarda; neste caso, os pesquisadores devem se manter em situação de superioridade ou, caso contrário, os participantes da pesquisa terminam por influenciar e impor os temas de investigação:

> Em muitos trabalhos sobre administração da educação, ao se comentar os temas de investigação, deparamo-nos com o administrador, que diz: "eu penso que sei o que você quer saber. O que é interessante para você é este aspecto. Eu já preparei um pequeno dossiê no qual estão todas as informações de que você necessita". Assim também com pais de classe média alta que dizem: "eu penso que você tem interesse nisto" (VAN ZANTEN, 2004 p. 28).

Neste caminhar, esta mesma autora diz que situações diferentes acontecem quando os investigados pertencem a grupos sociais menos favorecidos:

> Em alguns casos, alunos de bairros pobres dizem: "você trabalha para qual canal de televisão?", que estudo está fazendo?", "você vem porque lhe interessam os problemas de violência nesta escola" (VAN ZANTEN, 2004 p. 28).

O objetivo do pesquisador é o de compreender, com bastante detalhe, o que é que professores, diretores e estudantes pensam e como é que desenvolvem seus quadros de referência. Este objetivo implica em que o pesquisador passe um tempo necessário com os participantes da pesquisa no seu ambiente natural, elaborando questões abertas do tipo "descreva um dia típico" ou "de que mais gosta no seu trabalho"? Registrando as respectivas respostas. Esta elaboração permite, ao indivíduo, um caráter flexivo, ou seja, eles respondem de acordo com seu ponto de vista; não precisa ficar preocupados com formalidades.

Na pesquisa qualitativa não acontece à aplicação de questionários; talvez ocorra esporadicamente. Cabe ao pesquisador agir como instrumento levando os participantes pesquisados a expressar livremente suas opiniões sobre determinados assuntos. Com exceção de alguns casos, os estudos são desenvolvidos baseados em pequenas amostras (VAN ZANTEN, 2004).

Na pesquisa qualitativa o que se dá fora do ambiente de pesquisa é classificado como secundário. Os dados da pesquisa são obtidos através de contato profundo com os indivíduos, nos ambientes naturais (VAN ZANTEM, 2004).

Ao optar por essa metodologia os pesquisadores devem estar cientes de que sua participação deve ser de forma intrínseca; deve vivenciar a pesquisa procurando entender os fenômenos estudados como um todo. A realidade e os participantes são elementos indissociáveis levando-se em consideração seus traços subjetivos e suas particularidades.

3.2 O pesquisador na pesquisa qualitativa

De acordo com Bogdan; Biklem (1994) existe por parte dos pesquisadores um esforço intelectual para não levar em consideração seus pontos de vista não sendo aconselhável elaborar rigorosamente um método para construir a pesquisa. Os pesquisadores devem contribuir para que seus planos evoluam à medida que eles vão se familiarizando com o ambiente, pessoas são métodos de obtenção dos dados, os quais devem ser oriundos da observação direta. Bogdan; Biklen(1994) ainda afirmam que quando os trabalhos são iniciados os pesquisadores, mesmo tendo ideias acerca do que vão fazer, não devem seguir em detalhes nenhum plano detalhado antes da obtenção dos dados:

> Além disso, o pesquisador qualitativo evita iniciar um estudo com hipóteses previamente formuladas para testar questões específicas para responder, defendendo que a formulação das questões deve ser resultante da recolha de dados e não efetuada a priori. É o próprio estudo que estrutura a investigação, não ideias preconcebidas ou um plano prévio detalhado (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 83)

Uma das particularidades da pesquisa qualitativa é de que o pesquisador não deve se basear por nenhum plano delineado antes da recolha dos dados. Tendo em vista esta restrição, Bogdan; Biklen(1994) afirmam que os pesquisadores qualitativos têm um plano no qual a não afirmação deste plano seria um fato enganador. Segundo os autores, os pesquisadores qualitativos atuam baseados em hipóteses teóricas as quais caminham à luz da importância do processo e do significado no entendimento do comportamento humano, valorizando os dados descritivos como sendo o material mais importante a recolher como também tendo a ideia de que a análise dos dados objetivo se torna mais eficaz. O pesquisador qualitativo também se baseia nas tradições da recolha de dados como observação participante, entrevista não estruturada e análise de documentos.

Seria enganador não pensarmos que os pesquisadores qualitativos entram em uma pesquisa sem seus conceitos ou opiniões; na verdade, eles estão cheios de crenças e ideias oriundas de seus conhecimentos e experiências, mas de acordo com Bogdan; Biklen (1994) o importante é que essas crenças, ideias e hipóteses, sejam formuladas com o único objetivo de serem modificadas e agregadas a novos conhecimentos à medida que vão avançando:

> Os investigadores tradicionais definem o plano como o produto final da fase de planejamento da pesquisa. Este plano é, então, posto em prática, procede-se à recolha e análise dos dados e, em seguida, passa-se à fase da escrita. Embora as pesquisas qualitativas decorram de forma semelhante, as diferentes fases não são tão individualizadas. O planejamento é efetuado ao longo de toda a investigação. A análise dos dados é verificada ao longo de toda a investigação, se bem que seja normalmente nas fases finais que os dados são analisados de forma mais sistemática. Esta análise e elaboração do plano podem ser feitas em simultâneo (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 84).

Na pesquisa qualitativa o que acontece fora do ambiente de pesquisa é classificado como secundário. Os dados da pesquisa são obtidos através de contato profundo com os indivíduos, nos ambientes naturais. As estratégias que melhor consolidam a pesquisa qualitativa são aquelas que se inserem em contexto de observação participante e entrevista profunda (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

O objetivo do pesquisador é o de compreender, com bastante detalhe, o que é que professores, diretores e estudantes pensam e como é que desenvolvem seus quadros de referência. Este objetivo implica em que o pesquisador passe um tempo necessário

com os participantes de pesquisa no seu ambiente natural, elaborando questões abertas do tipo “descreva um dia típico” ou “de que mais gosta no seu trabalho”? registrando as respectivas respostas. Esta elaboração permite, ao indivíduo, um caráter flexivo, ou seja, eles respondem de acordo com seu ponto de vista; não precisa ficar preocupado com formalidades (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Na pesquisa qualitativa não acontece à aplicação de questionários, talvez ocorra esporadicamente. Cabe ao pesquisador agir como instrumento, levando os participantes pesquisados a expressar livremente suas opiniões sobre determinados assuntos. Com exceção de alguns casos, os estudos são desenvolvidos baseados em pequenas amostras (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

3.3 Problematização e objetivos da pesquisa

Esta pesquisa de mestrado foi oriunda do nosso interesse de trazer para a sala de aula, um tema pouco ou não utilizado nas aulas de Matemática; o uso de provas e demonstrações em uma visão que contribua para a melhoria do ensino desta disciplina. Pensamos que com essa pesquisa seja possível elaborar uma proposta didática que sirva como ponto de partida para que a inicialização do uso de provas e demonstrações matemáticas contribuíam para uma nova visão no ensinar Matemática.

Iniciamos por formar um grupo de estudos composto por um professor doutor, um mestrando, dois professores de Matemática da educação básica e também dois alunos da graduação do Curso de Licenciatura da Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Neste grupo os estudos e as discussões foram bastante enriquecedores devido às diferentes visões sobre o ensino da Matemática, pois tínhamos um professor doutor com conhecimento acadêmico, um aluno de mestrado em fase de mudança-construção de um novo pensamento de como lecionar matemática, professores com experiência no ensino da Matemática na educação básica e alunos de graduação que estão em fase de construção de como devem atuar em sala de aula. Nesses momentos de estudo surgiram observações bastante importantes principalmente quando eram confrontados os pensamentos dos componentes do grupo.

Na tentativa de estreitar nossos estudos optamos, inicialmente, por fazer leituras que abordam a utilização do potencial das provas e demonstrações nas aulas de Matemática da educação básica. Neste modelo nos propusemos a definir a questão que norteia nossos estudos:

Que tipos de provas matemáticas podem ocorrer a partir de uma proposta didática com o Teorema de Pitágoras por alunos do 3º Ano do Ensino Médio?

Com base nesta questão o objetivo geral da pesquisa foi o de investigar as possibilidades de demonstração matemática do Teorema de Pitágoras a partir de uma proposta didática aplicada a alunos do 3º ano do Ensino Médio.

A escolha do tema, da questão norteadora e o objetivo central desta pesquisa, foram sendo delineados a partir do momento em que a Equipe Provas e Demonstrações Matemáticas realizava leituras e discussões envolvendo o tema tendo, como objeto concreto de análise, uma intervenção didática, uma redação, uma proposta didática e um questionário final aplicados em uma turma de 3º Ano do Ensino Médio em uma Escola Estadual na Cidade de Areia, Paraíba.

Após ter escolhido o tema para a pesquisa foi necessária a escolha da escola, da turma e dos procedimentos da coleta de dados.

3.4 Contextualização e caracterização do ambiente da pesquisa

Esta Escola foi escolhida em virtude do pesquisador ter estudado na mesma e também porque o pesquisador fazia parte, antes, durante e depois da coleta de dados do seu corpo docente como professor efetivo na disciplina de Matemática e por se ter outro membro da equipe do Projeto também professor efetivo da mesma Escola.

A direção da Escola nos deu total liberdade para usar suas dependências com vista à realização de nossa pesquisa. De acordo com Cusick e McPherson, (apud Bogdan; Biklen, 1994) ter acesso ao ambiente onde pretender fazer a pesquisa pode ser um dos primeiros obstáculos para o pesquisador:

> O primeiro problema com que o investigador se depara no trabalho de campo é a autorização para conduzir o estudo que planeou. Há quem o ultrapasse fazendo uma *pesquisa dissimulada*, ou seja, a recolha de dados sem o consentimento dos participantes. Poderá por exemplo candidatar-se a um emprego na escola ou frequentar um curso sem informar as respectivas direções do seu intuito. Embora se tenha realizado algumas investigações clandestinas, o nosso conselho para o pesquisador inexperiente é o de utilizar uma *abordagem objetiva*. Nesta, o pesquisador explicita os seus interesses e tenta que os participantes que vão estudar, cooperem (CUSICK; MCPHERSON apud BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 114).

Trata-se de uma escola pública estadual localizada na cidade de Areia, Paraíba, a qual atende a alunos do Ensino Fundamental, Ensino Médio, Educação de Jovens e Adultos e oferece o Programa Mais Educação:

Foto 1 - Fachada da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Carlota Barreira”

Em 2015, o corpo docente da Escola é formado por 18 professores efetivos e 20 professores substitutos. A totalidade de professores da EEEFM “Carlota Barreira” tem nível superior, a maioria com Especialização e/ou Mestrado em sua área específica ou áreas afins, e dois deles cursando Doutorado.

A maioria dos alunos advém de lares com renda familiar inferior a um salário mínimo, apresentando condições econômicas precárias, não podendo usufruir de momentos de lazer. Moram em conjuntos habitacionais sem muita infraestrutura; outros na zona rural, em casas de taipa ou em casas de tijolos, mas falta a infraestrutura necessária. Em grande parte, são filhos de agricultores ou sem uma profissão definida, sobrevivendo de aposentadorias e dos projetos governamentais.

A EEEFM “Carlota Barreira” oferece ensino de educação básica atendendo alunos desde o 1º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio, com turmas distribuídas nos períodos matutino, vespertino e noturno com o Ensino Fundamental, Ensino Médio e também atende à demanda que opta pela modalidade de Educação de Jovens e Adultos – EJA. A referida unidade escolar é contemplada com alguns programas do governo federal, com destaque para o Programa Mais Educação.

3.5 Os participantes da pesquisa

Nas palavras de Moreira; Caleffe (2008) a escolha dos participantes depende do problema a ser estudado. O participante pode ser uma pessoa ou um grupo de pessoas, uma disciplina, uma instituição, um projeto ou um conceito. Os participantes são escolhidos de forma intencional, ou seja, a amostra é selecionada levando-se em consideração os participantes que podem contribuir para a pesquisa.

Optamos por envolver alunos do Ensino Médio pressupondo que eles já detinham algum conhecimento em relação a Pitágoras e a alguma demonstração do seu Teorema. Selecionamos uma turma de 3° ano, pois acreditávamos que, em virtude desses alunos já se encontrarem no último ano do Ensino Médio, eles ficariam mais à vontade perante as dificuldades encontradas no decorrer da aplicação da proposta didática. Salientamos que, para a seleção desta turma não houve critérios que levassem em consideração o conhecimento matemático dos alunos. Este público tem, em sua maioria, alunos que cursaram a primeira fase da educação básica em escolas municipais da zona rural.

3.6 A escolha do teorema

O teorema em questão foi escolhido por ser uma das principais descobertas da Matemática e foi também através do Teorema de Pitágoras que surgiram outros conceitos na Matemática. A beleza, elegância e o grande número de demonstrações que existem para comprovar sua veracidade, fazem com que este teorema seja um rico objeto matemático para ser explorado em todos os níveis de escolaridade, abrindo espaços para uma visualização diferente da Matemática que é ensinada nas escolas.

3.7 Intervenção

Antes da coleta de dados realizamos uma intervenção didática para trabalhar conceitos envolvendo definições, teoremas, demonstrações e propriedades dos triângulos.

3.8 A coleta de dados

A obtenção dos dados ocorreu no mês de junho de 2015; iniciamos por dar a oportunidade para que os alunos do ensino médio redigissem livremente o que conheciam sobre teoremas, provas e demonstrações. Entregamos aos alunos uma folha em branco para que os mesmos ficassem à vontade; colocaram no papel seus conceitos sobre os temas citados anteriormente. Em um segundo e terceiro momentos aplicamos uma proposta didática com os alunos do 3º ano do Ensino Médio. De acordo com Moroz; Gianfaldoni (2006, p. 83), “a coleta de dados é o momento em que se obtém as

informações necessárias e que será alvo de análise, posteriormente". A coleta se deu através dos instrumentos descritos a seguir.

3.9 Instrumentos da pesquisa

Na obtenção dos dados iniciamos por permitir, aos alunos, oportunidades para dissertarem sobre provas e demonstrações matemáticas, através de redação.

5.9.1 Primeiro Momento: Redação

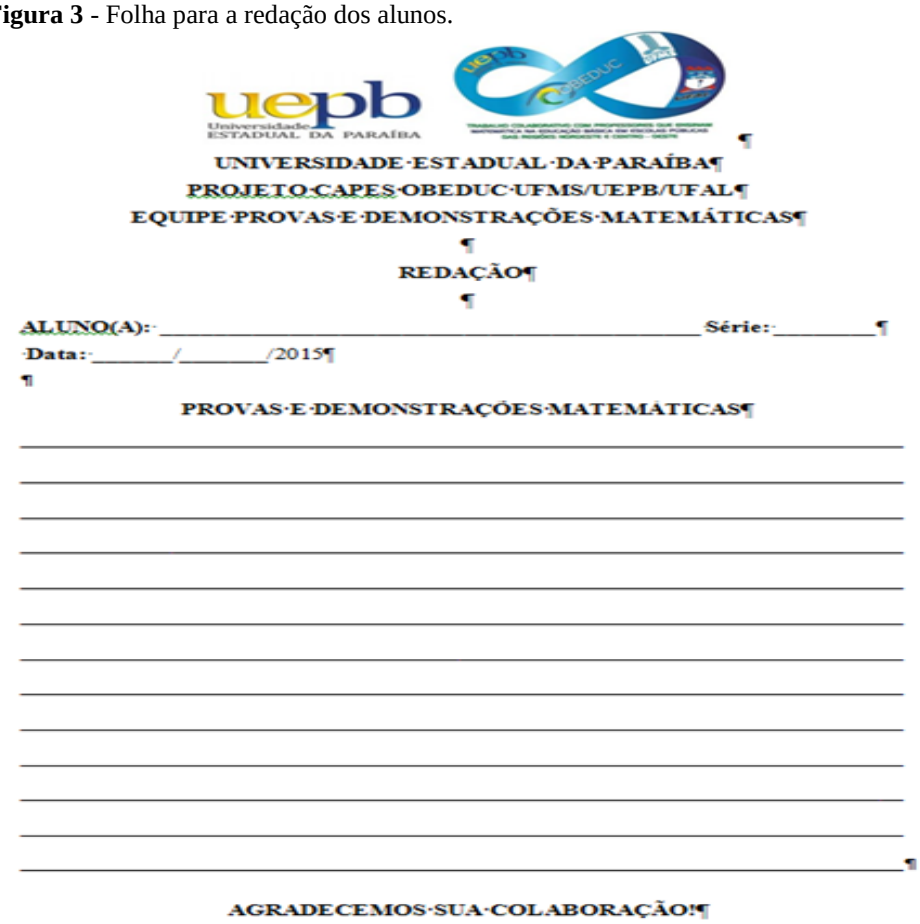
Na concepção de Smole (2001) se o aluno for encorajado a produzir textos em Matemática fará com que a Matemática se aproxime da língua materna. Além de ser uma proposta interdisciplinar, favorece a valorização de diferentes habilidades que compõem a realidade complexa de qualquer sala de aula:

> A produção de textos nas aulas de matemática cumpre papel importante para a aprendizagem do aluno e favorece a avaliação dessa aprendizagem em processo (SMOLE, 2001. p. 29).

Utilizamos a redação como instrumento de coleta de dados porque acreditamos que em situações que permitam liberdade para expressar seus pensamentos, os alunos realmente escreveriam o que sabiam sobre provas e demonstrações matemáticas logo, porque, tratando-se de uma redação, eles não seriam direcionados por questões que lhes impusessem limites ao seu modo de se expressar.

A redação foi utilizada por se acreditar ser um instrumento importante para conhecermos o que os alunos sabem sobre o tema em questão. A redação foi aplicada para 30 participantes da pesquisa, ou seja, por alunos da turma, onde a pesquisa de campo foi realizada (Apêndice 1):

Figura 3 - Folha para a redação dos alunos.



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL

EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

REDAÇÃO

ALUNO(A): _____ Série: _____

Data: _____/_____/2015

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!

Fonte: Nossa autoria

3.9.2 Segundo Momento: Proposta Didática

Após as leituras realizadas sobre provas e demonstrações matemáticas e dos dados obtidos por Santos; Lins (2012) e Santos; Lins (2013a e 2013b), elaborou-se uma proposta didática (Apêndice 2) dividida em quatro partes, em que a parte 1 é composta de 7 atividades; a parte 2, de 4 atividades; na parte 3 tínhamos 2 atividades e na última parte 5 atividades. Para esta pesquisa foi utilizada a primeira parte da proposta didática visando proporcionar, aos alunos, condições para melhor compreensão do significado do Teorema de Pitágoras. Pretende-se, com isto, que eles o entendam não como uma simples fórmula a memorizar mas, sim, como afirmação matemática que carece de uma demonstração e que também é uma ferramenta utilizável na resolução de inúmeros problemas de Geometria.

Em uma primeira fase de atividades, o Teorema é tratado como objeto de estudo; partindo do reconhecimento dos elementos de um triângulo retângulo, espera-se que os alunos percebam a característica necessária e suficiente do Teorema e, em seguida, se almeja que conjeturem sobre sua forma e, progressivamente, deve-se chegar a uma

abstração e à institucionalização. Finalizando, espera-se que as duplas pesquisadas consigam demonstrar o Teorema de Pitágoras. O Quadro 2 traz, em resumo, o pretendido por cada atividade:

Quadro 2- Resumo dos resultados esperados em cada atividade da primeira parte da proposta didática.

Atividades	Resultados Esperados
1	Identificar os elementos de um triângulo retângulo
2	Conjecturar uma relação entre os quadrados formados com os lados do triângulo retângulo
3	Uma dedução através de cálculos numéricos do Teorema de Pitágoras
4	Construção para iniciar uma formalização do Teorema
5	Formalização do Teorema de Pitágoras
6	Reconhecer hipótese e a tese de um Teorema
7	Esboçar uma demonstração do Teorema de Pitágoras

3.9.3 Proposta Didática (1ª Parte)

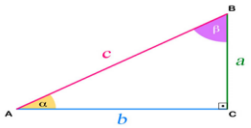
Como foi mencionado para esta pesquisa, analisamos a primeira parte da Proposta Didática.

3.9.3.1 Atividade 1

Figura 4 - Atividade 1

PARTE I

(1) (nossa autoria) Observem o triângulo ABC retângulo em C. Com base em suas observações, determinem e justifiquem:



a) Como identificar um triângulo retângulo?
b) os catetos:
c) a hipotenusa:
d) o ângulo reto (90°)
e) os ângulos agudos

Objetivo: Que os alunos saibam identificar os elementos que compõem o triângulo retângulo obedecendo suas características. Nesta atividade os alunos são expostos a questões que exigiam conhecimentos adquiridos sobre os elementos que

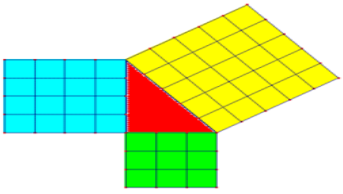
compõem o triângulo retângulo para que seja identificado seu grau de familiaridade sobre este polígono.

3.9.3.2 Atividade 2

Figura 5 - Atividade 2

(2) (nossa autoria) De acordo com Eves (2004) e Boyer (2010), os povos antigos, acerca de 3000 anos, como egípcios e babilônicos, sabiam que o triângulo de lados 3, 4 e 5 era retângulo, mas de acordo com Lima (2006), esses povos não tinham a necessidade de demonstrar esta afirmação.

Na Figura abaixo temos um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 unidades de comprimento:



Foram construídos quadrados com os lados desse triângulo. Esses quadrados foram divididos em quadrados menores, como vocês podem observar na Figura. Respondam:

a) Quantos quadradinhos tem o quadrado maior?

b) Qual é o número de quadradinhos do quadrado intermediário?

c) Qual a quantidade de quadradinhos em que o quadrado menor foi dividido?

d) De acordo com as respostas dos itens a, b e c, vocês conseguem observar alguma

Objetivo: que os alunos façam a contagem e percebam a relação existente nos resultados encontrados.

3.9.3.3 Atividade 3

Figura 6 - Atividade 3

(3) (extraído de Bastian, 2000) No quadro abaixo, a medida de cada cateto e da hipotenusa são lados dos quadrados A, B e C respectivamente. Com base nesta informação, calculem as áreas A, B e C:

			Áreas dos Quadrados		
Cateto a	**Cateto b**	**Hipotenusa c**	**Área A**	**Área B**	**Área C**
3	4	5			
6	8	10			
5	12	13			
9	12	15			

a) Comparando as áreas A, B e C, a que conclusão vocês chegaram?

b) Será que a conclusão descrita acima, no item (a), vale para qualquer triângulo? Experimentem usá-la em um triângulo de lados 4, 7 e 8. O que vocês observaram?

Objetivo: que as duplas calculem as áreas dos quadrados de acordo com as informações dadas e que consigam relacionar esses resultados enxergando que em todos os casos somando-se os resultados encontrados para a área A com os resultados encontrados para a área B é igual aos resultados encontrados para a área C e consigam fazer um paralelo entre esses resultados e o Teorema de Pitágoras, percebam que em todos os casos existe um padrão e que esses resultados venham fortalecer o que foi pedido na Atividade 2.

3.9.3.4 Atividade 4

Figura 7 - Atividade 4

(4) (extraído de Bastian, 2000)

a) Desenhem e recortem um triângulo retângulo qualquer. Agora desenhem e recortem mais sete triângulos idênticos ao primeiro, identificando seus referidos lados como a, b e c.

b) Agora desenhem e recortem um:

- ✓ Quadrado de tamanho igual ao lado *a* (pinte de vermelho)
- ✓ Quadrado de tamanho ao lado *b* (pinte de amarelo)
- ✓ Quadrado de tamanho ao lado *c* (pinte de verde)

c) como se fosse um quebra cabeças montem:

- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e o quadrado vermelho
- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e os quadrados amarelos e verdes
- ✓ Se retirarmos das duas figuras montadas os quatro triângulos, o que podemos dizer sobre as áreas restantes de cada figura?
- ✓ Existe alguma relação entre as áreas restantes? Como podemos escrever esta relação?

Objetivo: que após a construção por parte dos alunos as duplas consigam visualizar o que acontece com as áreas de ambos os “quadradões” após serem retiras as peças determinadas no item “c”. Que os alunos tenham o maior envolvimento na resolução desta atividade devido ao fato de que é uma atividade que precisa da participação dos alunos para construir o material necessário para a montagem da questão. Que após a construção e a montagem do quebra-cabeça os alunos cheguem a perceber a relação existente entre as figuras.

3.9.3.5 Atividade 5

Figura 8 - Atividade 5

5) (extraído de Bastian, 2000)

a) Descrevam algebricamente a área do quadradão (Figura 1) em função do quadrado contido nele e dos quatros triângulos retângulos.

b) Façam o mesmo na Figura 2.

c) Que relação existe entre as áreas dos quadradões das Figuras 1 e 2? Deduzam a relação entre a, b e c.

Objetivo: que os alunos formalizem, de forma mais rigorosa, os dados obtidos na atividade 4.

3.9.3.6 Atividade 6

Figura 9 - Atividade 6.

(6) (nossa autoria) Um teorema é uma afirmação matemática que deve ser rigorosamente demonstrada. Sendo assim, para que o Teorema de Pitágoras seja válido é necessário demonstrá-lo. Podemos escrever o Teorema de Pitágoras na forma implicativa: ***Se o triângulo é retângulo então a área do quadrado que tem como lado a medida da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos catetos são os lados.***

No Teorema escrito na forma implicativa, identifiquem:

a) Hipótese

b) Tese

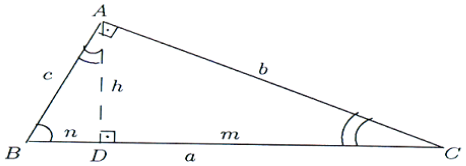
Objetivo: que os alunos identifiquem a hipótese e a tese a partir de um teorema escrito na forma condicional.

3.9.3.7 Atividade 7

Figura 10 - Atividade 7

(7) (adaptado de Lima, 2006)

No triângulo ABC, retângulo em A, a altura AD (perpendicular a BC) relativa à hipotenusa origina dois triângulos semelhantes ao próprio triângulo, em vista da congruência dos ângulos (BÂD $= \widehat{C}$, complemento de $\widehat{B}$, CÂD $= \widehat{B}$, complemento de $\widehat{C}$). Portanto, temos proporcionalidade entre os lados homólogos, uma para cada triângulo parcial ou total:



$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \; e \; \frac{b}{a} = \frac{m}{b}$$

Usando as informações acima, tentem demonstrar o Teorema de Pitágoras.

Objetivo: que os alunos consigam desenvolver uma demonstração para o Teorema de Pitágoras levando em consideração o caminhar nas atividades desenvolvidas até este momento. Que os alunos consigam visualizar e entender o significado de uma demonstração. Partindo deste ponto, que os alunos sejam capazes de usar a propriedade fundamental das proporções e desenvolvam uma demonstração levando em consideração o desenvolvimento da proposta didática,até este ponto.

3.9.4 Terceiro momento: Questionário Final

Confeccionamos um questionário (BOGDAN; BIKLEN, 1994) composto de oito questões, sendo seis objetivas e duas subjetivas. Este questionário foi nomeado como Questionário Final (Apêndice 3) e foi aplicado com o objetivo de diagnosticar as principais dificuldades encontradas pelas duplas pesquisadas; bem como se estes conseguiram estabelecer relação entre as atividades, entenderam seu objetivo e as explicaram e por fim se conseguiriam demonstrar o Teorema de Pitágoras dentro do contexto do referencial teórico.

Questionário é um instrumento de coleta de dados com questões para serem respondidas sem a participação direta do pesquisador. “Devendo ser bem planejado de forma que as questões definam claramente o conteúdo que se pretende seja abordado pelo sujeito” (MOROZ; GIANFALDON, 2006, p.79).

O questionário foi utilizado por se acreditar ser um instrumento importante para que os alunos escrevam de livre e espontânea vontade, seus conhecimentos em relação ao(s) tema(s) abordado(s). O questionário foi respondido pelas três duplas, participantes da pesquisa, ou seja, por alunos da turma do 3º ano do Ensino Médio da Escola em que a pesquisa foi realizada:

Figura 11 - Questionário final.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL
EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

PROPOSTA DIDÁTICA
DESAFIANDO NOSSO PENSAMENTO MATEMÁTICO
(QUESTIONÁRIO FINAL – ALUNOS)

Data: _____

Dupla:_____

_____

1. Qual o seu ponto de vista em relação à aplicação da proposta didática?
2. No seu entendimento, qual foi o objetivo da aplicação da proposta didática?
3. Ao resolver as atividades propostas você percebeu alguma relação entre elas?
4. Quais foram suas dificuldades na resolução das atividades propostas?
5. Expliquem suas respostas em cada atividade

Atividade 1:
Atividade 2:
Atividade 3:
Atividade 4:
Atividade 5:
Atividade 6:
Atividade 7:

6. De acordo com os seus conhecimentos, construa uma demonstração para o Teorema de Pitágoras.
7. Descreva o que foi a intervenção didática para cada um de vocês da dupla.
8. A intervenção didática auxiliou cada um de vocês na resolução da proposta didática? Se sim, explique. Se não, justifique.

Fonte: nossa autoria

As questões 1, 2, 3 e 4 tiveram, como objetivo, obter informações sobre aspectos relevantes à composição da aplicação da proposta didática como dificuldade encontrada pelos alunos na sua resolução e sua percepção em relação ao objetivo da proposta.

A quinta questão foi desenvolvida com o objetivo de entender o significado das respostas atribuídas pelos alunos, a cada atividade.

A sexta questão foi feita para que os alunos tivessem a oportunidade de demonstrar o Teorema de Pitágoras de acordo com seus conhecimentos.

Na sétima questão cada aluno da dupla escreveu sua opinião sobre a intervenção didática.

Para finalizar, a oitava questão veio com o propósito de fazer com que o aluno escreva o que ele entendeu ou não através da intervenção didática.

A seguir, o Quadro 3 detalha em resumo o desenvolvimento das atividades executadas para a coleta de dados:

Quadro 3 - Desenvolvimento das atividades planejadas na coleta de dados

Data	Planejado	Ocorrido
14/06	Intervenção didática	- Explicação do que é definição de um objeto matemático; - Explicação sobre a definição de Teorema; - Explanação do que é uma demonstração; - Definição de triângulo retângulo; - Explicação da condição de existência de um triângulo; - Definição de ângulo; - Definição do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo; - Definição do teorema do ângulo externo de um triângulo.
15/06	Redação	- Entrega do material à redação; - explicação por parte do pesquisador para os alunos em relação ao objetivo da redação.
17/06	Aplicação da parte I da proposta didática	- O pesquisador explicou as atividades; - Intervenção do pesquisador para acalmar a turma; - Intervenção do pesquisador para sanar questionamentos dos alunos.
18/06	Aplicação da parte II da proposta didática	- Intervenção do pesquisador para relembrar o que foi feito no encontro anterior; - O pesquisador respondeu alguns questionamentos dos alunos; - Continuidade da parte II da proposta.
19/06	Aplicação da parte III da proposta didática	- Intervenção do pesquisador para revisar o que tinha acontecido até o encontro anterior; - Pesquisador explica algumas dúvidas dos alunos; - Continuação da última etapa da proposta.
11/08	Aplicação do Questionário Final	- Seleção das duplas; - Explicação do questionário. - Respostas a alguns questionamentos dos alunos. -Aplicação do questionário final.

Fonte: Baseado em Costa (2011)

3.10 Classificando a pesquisa

Considerando o caminhar da pesquisa e o tipo de investigação realizada, de modalidade qualitativa e interpretativa, para a análise dos dados, serão adotados as técnicas do estudo de caso. André (2005) ressalta que o estudo de caso se inicia de forma embrionária, que se vai delineando mais claramente, de acordo com o avanço dos

estudos. Adotamos, para a pesquisa, uma problemática inicial que pode ser traduzida em múltiplas questões, em pontos críticos ou em hipóteses provisórias.

Triviños (1987) define estudo caso como um paradigma de pesquisa que tem, como objeto de estudo, uma unidade que se analisa profundamente.

Essa metodologia de pesquisa procura aprofundar-se em um campo de estudo mais específico. Uma de suas vantagens é a possibilidade de fornecer um olhar minucioso, amplo e integrado com uma unidade social envolvida por múltiplas variáveis. O estudo de caso obedece a uma boa delimitação e tem seus contornos bem definidos, ou seja, o caso se destaca por se colocar numa afinidade dentro de um sistema mais amplo (LUDKE; ANDRE, 1986).

A metodologia estudo de caso é definida por Bogdan; Biklen (1994) como uma metodologia que consiste na observação minuciosa de um contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico.

O estudo de caso possui ótima característica que visa contribuir para conhecer problemas da prática educacional analisando um requisito profundamente detectando seus atributos para melhor entendimento na decisão para a correção de um problema. Para André (2005):

> Outra qualidade usualmente atribuída ao estudo de caso é seu potencial de contribuição aos problemas da prática educacional. Focalizando uma instância em particular e iluminando suas múltiplas dimensões assim como seu movimento natural, os estudos de caso podem fornecer informações valiosas para medidas de natureza prática e para decisões políticas (ANDRÉ, 2005. p. 35).

Na Educação Matemática é cada vez maior o número de estudos que utilizam este método de pesquisa. Esta modalidade vem sendo cada vez mais utilizada em pesquisas de mestrado e doutorado que buscam conhecer fenômenos individuais, coletivos, organizacionais, políticos e sociais, entre outros. O estudo de caso é um método bastante utilizado nas pesquisas em psicologia, sociologia, ciências políticas, antropologia, assistência social, administração, educação, enfermagem e planejamento comunitário (PONTE, 2006 e YIN, 2001).

Triviños (1987) destaca que o estudo de caso dentro da pesquisa qualitativa talvez seja o mais importante. O tipo de estudo na pesquisa qualitativa é caracterizado a partir do ponto de vista da medida dos dados que ele apresentava, pela utilização elementar de uma estatística simples.

3.10.1 O pesquisador no processo

Nossa participação na pesquisa foi de caráter duplo, ou seja, contemplávamos o grupo de estudos e também era integrante do corpo docente da Escola onde a pesquisa foi realizada. No desenvolvimento do grupo agíamos como participante e também como pesquisador observando e fazendo anotações dos acontecimentos provenientes dos momentos de estudo, debates e sugestões para a elaboração de uma proposta didática. Em alguns momentos abastecíamos o grupo com materiais para leitura e também sugestões para elaboração de artigos científicos envolvendo a pesquisa. Em certas ocasiões tinha-se um pensamento dúbio, ou seja, no pensamento do pesquisado vinham sempre algumas reflexões sobre seu papel como professor. Em todos os encontros caminhávamos sempre na tentativa de responder às questões que nortearam esta pesquisa e, como pesquisador, tinha em mente que não deveria deixar meus sentimentos de professor influenciar no processo da pesquisa. Da nossa prática em sala de aula procurávamos neutralizar os acontecimentos referentes ao tema que seria abordado na pesquisa.

3.10 Caminhando para a análise dos dados

A análise dos dados está presente em vários momentos da pesquisa. Ao se pensar em fazer pesquisa, já iniciamos por analisar o que queremos estudar e como vamos abordar o objeto de estudo (ANDRÉ, 2005, p. 55):

> Desde o início do estudo, no entanto, são usados procedimentos analíticos, quando se procura verificar a pertinência das questões selecionadas frente às características específicas da situação estudada e são tomadas decisões sobre áreas a serem mais exploradas, aspectos que merecem mais atenção e outros que podem ser descartados.

No encerramento da coleta de dados se inicia a análise propriamente dita. É o momento de namorar os dados obtidos durante o processo de coleta; iniciamos por organizar, colocando em ordem e separando-os de acordo com as fontes de coleta. O próximo passo serão a leitura e a releitura do material por completo para selecionar os pontos relevantes e iniciar o processo de construção das categorias descritivas (ANDRÉ, 2005):

> ...é preciso reservar um longo período de tempo para a análise dos dados, para que seja possível ler e reler inúmeras vezes o material... (ANDRÉ, 2005. p. 56).

No caso de nossa pesquisa não houve intervalo entre o processo de coleta dos dados e a análise formal. Optamos assim que concluímos a coleta dos dados e adentrarmos no processo de análise dos mesmos. Nem sempre isto acontece; de acordo com Bogdan; Biklen (1994) existe a opção de fazer um intervalo entre esses dois processos:

> Muitos observadores experientes sabem o que fazer – fazem um intervalo. Deixam o material assentar, partem para férias ou fazem coisa que não puderam fazer por estarem tão ocupados com a recolha dos dados e só voltam depois, frescos e mais descansados (BOGDAN; BIKLEN, 1994. p. 220).

Os dados foram coletados no período de junho a agosto de 2015; ao finalizar a coleta de dados, nos deparamos com grande quantidade de material (redação, proposta didática e questionário final); a partir deste momento começamos a analisar os dados no mês de agosto de 2015.

> É de fundamental importância que o pesquisador, após ter coletado os dados que poderão responder ao problema colocado, os torne inteligíveis. Tornar os dados inteligíveis significa organizá-los de forma a propor uma explicação adequada àquilo que se pretende investigar; um conjunto de informação sem organização é de pouca serventia (MOROZ; GIANFALDONI, 2006. p 85).

A busca para organizar os dados, tornando-os inteligíveis para a compreensão de nosso estudo, resultou num conjunto de três categorias. No caso da nossa pesquisa iniciamos a categorização levando em consideração seus três momentos; assim, três grandes categorias se constituíram, sendo elas: *Perfil dos alunos, Conhecimento matemático dos alunos e Aprendizagem*. Todas as categorias foram divididas em subcategorias.

A análise dos dados foi fundamentada na triangulação de dados. Essa técnica de análise de dados tem sua origem em outras ciências que não as ciências sociais e humanas (DUARTE, 2009). A triangulação é uma técnica oriunda da navegação e da topografia. "Neste campo, a triangulação se refere a um método para determinar a posição de um ponto C, através da observação de dois pontos, A e B (Figura 1). Se o observador tiver informação suficiente acerca da distância entre A e B, pode determinar facilmente as distâncias entre B e C e entre A e C, caso em que os ângulos β e α querem que a distância entre A e B seja corretamente medida" (DUARTE, 2009, p. 10).

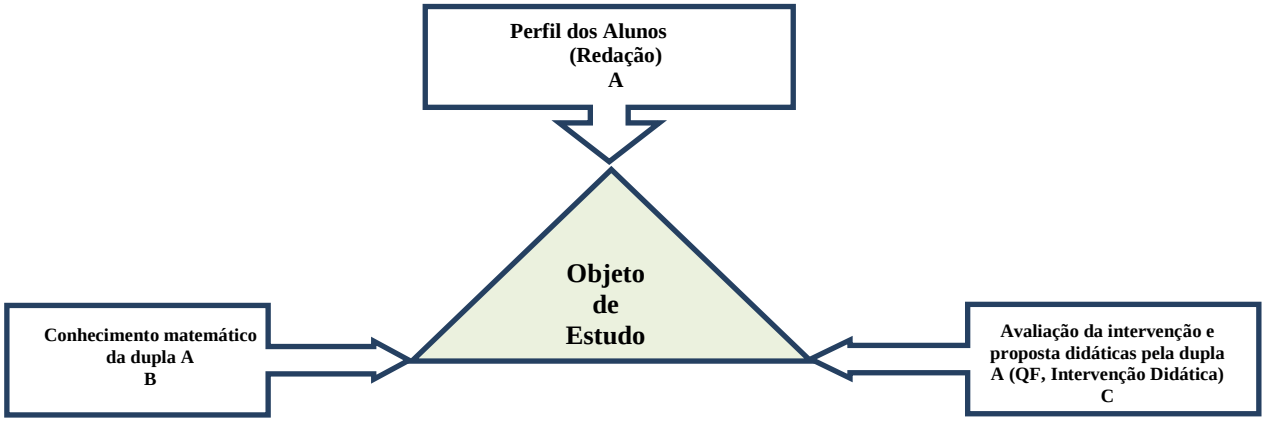
De acordo com Duarte (2009), o termo triangulação começa a ser desenvolvido na área da Psicologia por Campbell e Fiske (1959) que testaram, através do empirismo, os resultados obtidos utilizando diferentes técnicas quantitativas:

> A técnica por triangulação tem por objetivo básico abranger a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão do foto em estudo. Para de princípios que sustentam que é impossível conceber a existência isolada de um fenômeno social, sem raízes históricas, sem significados culturais e sem vinculações estreitas e essenciais como macrorrealidade social (TRIVIÑOS, 1987. p. 138).

Essa técnica vem como forma de amenizar problemas de credibilidade em pesquisas ao adotar, como estratégia de investigação, múltiplas visadas e métodos de obtenção de informações.

Trazendo o modelo utilizado por Lins (2003) nos baseamos no mesmo para a triangulação dos dados obtidos em nossa pesquisa:

Figura 12 - Triangulação de dados.



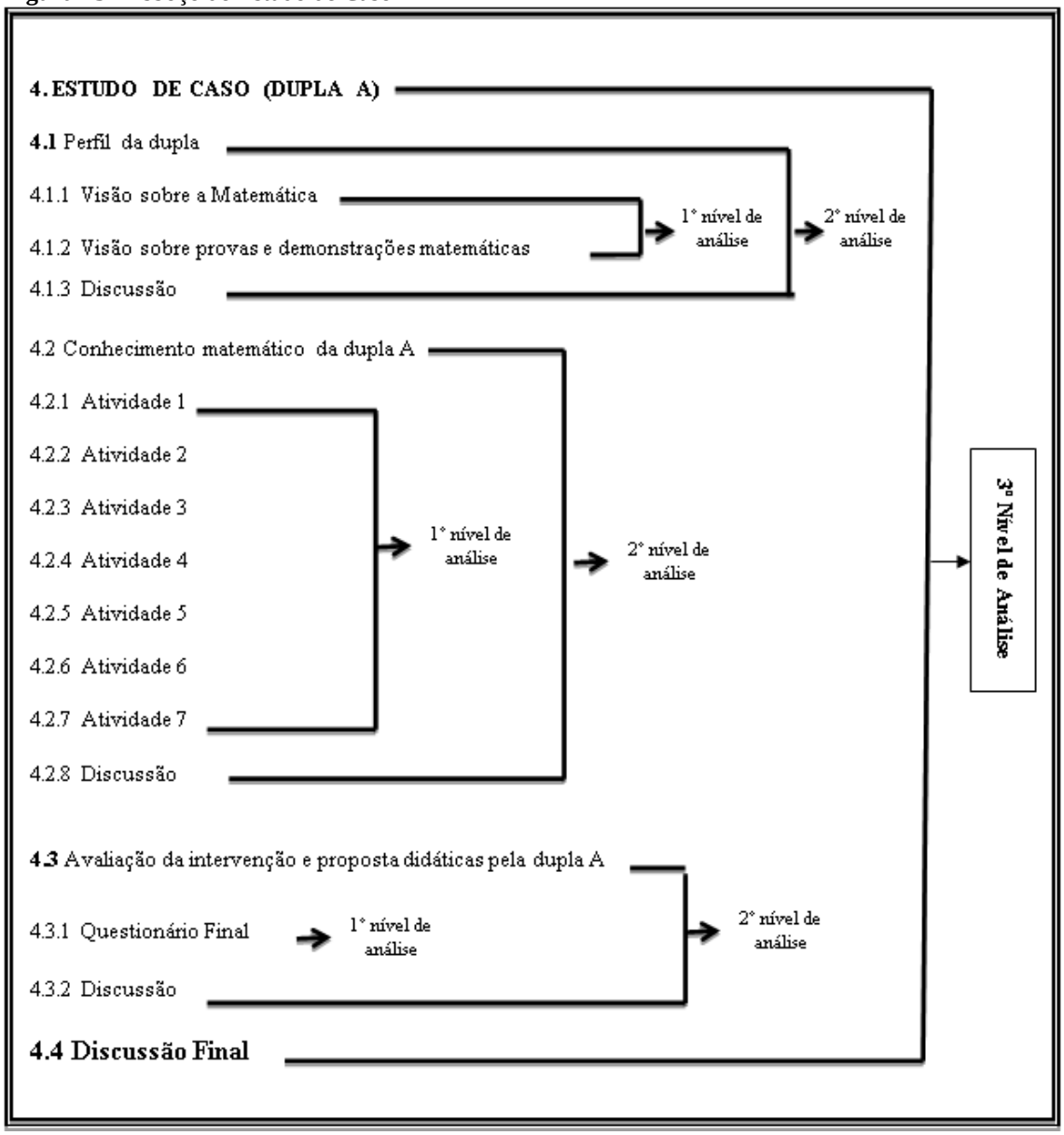
Fonte: Estrutura adaptada de Lins (2003)

A análise foi desenvolvida objetivando responder a pergunta que norteou nossa pesquisa: *Que tipos de provas matemáticas podem ocorrer a partir de uma proposta didática com o Teorema de Pitágoras por alunos do 3º Ano do Ensino Médio?*

De acordo com a Figura 12, o primeiro vértice (A) visa trancar o perfil das duplas pesquisadas em relação a provas e demonstrações matemáticas. A coleta de dados ocorreu através de uma redação e proporcionou espaço para os alunos escreverem o que eles entendem sobre essas ferramentas. O vértice B traz o conhecimento matemático da dupla A, em relação aos elementos do triângulo retângulo e ao Teorema de Pitágoras. Para isto, a coleta de dados se deu por meio da aplicação de uma proposta didática. O vértice C visa apresentar a avaliação da dupla sobre a proposta didática e a intervenção didática. Para tal, a coleta de dados se deu através de um Questionário Final (QF).

Os vértices do triângulo foram finalizados com os comentários oriundos da análise dos elementos trazidos por todos os vértices. Finalizamos o estudo de caso com uma discussão. Os vértices se deram como categorias de análise, sendo elas: Perfil dos Alunos, Conhecimento sobre elementos do triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras e Demonstrações do Teorema de Pitágoras. Dentro de cada categoria foram criadas algumas subcategorias mostradas na Figura a seguir. Retiramos da pesquisa de doutorado de Lins (2003) a estrutura para abordar a relação entre as categorias e as subcategorias:

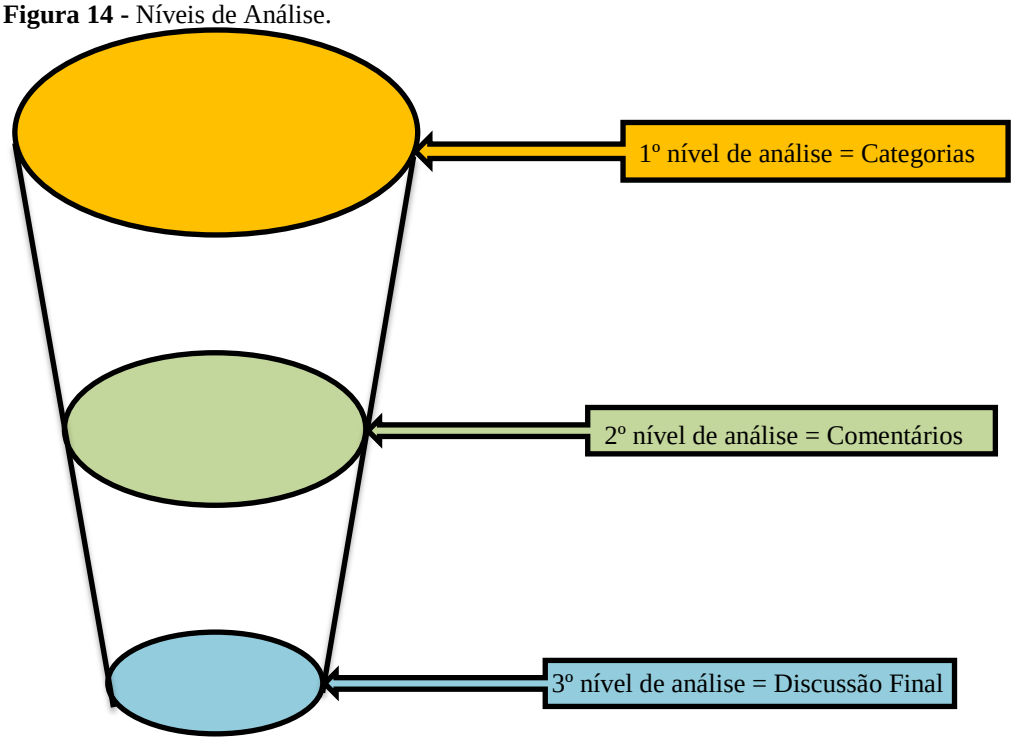
Figura 13 - Esboço do Estudo de Caso



Fonte: Baseado nos estudos de Lins (2003)

Finalizamos cada categoria com uma discussão referente à sua análise e encerramos o estudo de caso com uma discussão final envolvendo todos os Comentários de cada seção. O modo como realizamos a análise se encaixa no modelo utilizado nos estudos de Lins (2003) em que esta autora realizou sua análise em três níveis e em forma de um funil, como pode ser visto na Figura 14.

Figura 14 - Níveis de Análise.



Fonte: Estrutura adaptada de Lins (2003)

No primeiro nível de análise se encontram as categorias definidas e as subcategorias; no Nível 2 tem-se os Comentários fechando a seção e no último Nível finalizamos com a discussão que envolver todos os comentários.

A análise dos dados foi desenvolvida sempre relacionada com o objetivo de nossa pesquisa, o de investigar as possibilidades de demonstração matemática do Teorema de Pitágoras a partir de uma proposta didática aplicada a alunos do 3º ano do Ensino Médio.

Algumas contribuições da pesquisa, e também limitações, inquietações e futuras questões, serão apresentadas depois da apresentação do estudo deste caso.

Após o processo de descrição da análise desta pesquisa apresentamos o estudo de caso.

CÁPITULO 4

ANÁLISE DOS DADOS

No capítulo 4 descrevemos o Estudo de Caso realizado em nossa pesquisa. O mesmo se apresenta em três seções sendo a primeira, *Perfil da dupla A*, a segunda, *Conhecimento matemático da dupla A* e a terceira *Avaliação da intervenção e proposta didáticas pela dupla A*. Nesta análise escolhemos uma dupla de alunos do 3º ano do Ensino Médio, denominada Dupla A, que melhor desempenhou as atividades da primeira parte da proposta didática a fim de propiciar uma visão geral que responda à nossa questão de pesquisa.

A primeira seção, *Perfil da dupla A*, representa o vértice A do triângulo. Nela analisamos a redação sobre o tema provas e demonstrações matemáticas que foi aplicada em um Primeiro Momento. Esta seção se deu a fim de traçar a concepção dos alunos em relação a este tema. Em seguida, na segunda seção, *Conhecimento matemático da dupla A*, constitui o vértice B do triângulo no qual aplicamos uma proposta didática envolvendo elementos do triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras cuja análise foi feita levando-se em consideração subcategorias, as atividades 1 a 7.

Finalizamos com a terceira seção, constituindo o vértice C do triângulo cujas fontes foram a intervenção didática e o questionário final (QF).

ESTUDO DE CASO

Apresentamos e discutimos o estudo de caso em três seções visando analisar provas e demonstrações matemáticas por alunos do Ensino Médio, levando em consideração realidades e necessidades. Nas seções discutimos o perfil dos alunos da Dupla A, o conhecimento matemático dos alunos e a avaliação da intervenção e proposta didáticas pela dupla A.

4.1 Perfil Da Dupla A

Os alunos Juliana e Willian, nomes fictícios escolhidos por eles, compõem a dupla A. Salientamos que, na íntegra, as redações elaboradas pelos alunos da dupla se encontram no Apêndice A.

4.1.1 Visão sobre a Matemática

Na visão de Juliana sobre a Matemática, o importante e relevante é a existência da mesma para soluções de problemas na sociedade, tanto antiga como atual, quando afirma que "a todo tempo se faz necessário a resolução de problemas que envolvem equações..." (Redação, Juliana).

A visão de Willian sobre a Matemática é que "a Matemática é com certeza uma das mais fascinantes ciências que existe" (Redação, Willian). Willian acrescenta, ao atribuir sua existência, que "podemos ver que a Matemática está por toda a parte em nossa volta, por isso mesmo sem gostar devemos aprender Matemática" (Redação, Willian).

4.1.2 Visão sobre provas e demonstrações matemáticas

Percebemos que ambos os alunos dissertaram sobre provas e demonstrações matemáticas como sendo afirmações matemáticas.

Juliana utilizou da história da Matemática, especificamente Pitágoras, para justificar o nascimento de afirmações matemáticas:

"Com o passar do tempo o ser humano passou a buscar explicações para vários acontecimentos em sua volta. Dentre elas surgiram as explicações matemáticas estudadas inicialmente na Grécia Antiga, pelo filosofo Pitágoras que também fundou uma escola chamada "Escola Pitagórica", com o intuito de explicar acontecimentos do dia-a-dia através de equações matemáticas".

Juliana indagou a relevância de afirmações matemáticas nos dias atuais e ressalta que afirmações matemáticas são fundamentais hoje em dia tanto quanto em tempos passados:

"Mas será que tais explicações e afirmações possui papel relevante na sociedade atual?"

"Desse modo pode-se inferir que as afirmações e explicações matemáticas assim como na ´poca de Pitágoras possui papel fundamental nos dias atuais."

Já Willian alegou a vida cotidiana para justificar a necessidade de afirmações matemáticas:

“Um dos muitos motivos pelos quais muitas pessoas aprenderam a gostar da Matemática é poder provar se uma determinada afirmação é realmente verdadeira ou não”.

Willian também destaca o uso da Matemática e afirmações matemáticas no âmbito empírico:

“Seja qual for o tipo de operação matemática em todas elas podemos provar na prática se o resultado está correto”.

4.1.3 Comentários

Juliana vê a Matemática como uma ciência importante para se resolver problemas do cotidiano sendo que na Matemática se devem provar suas afirmações. Willian entende ser a Matemática uma das ciências mais fascinantes e presentes no nosso cotidiano e ao nosso redor. Afirmações matemáticas para Willian se dão no campo empírico, isto é, na prática.

Acreditamos que o exposto pelos alunos Juliana e Willian sobre a visão da Matemática e provas e demonstrações matemáticas é em parte o que é dito por professores de Matemática em sala de aula.

Podemos aferir que as visões de Juliana e Willian se dão, talvez ao fato de ser costumeiramente ressaltada em sala de aula a importância da Matemática em nossas vidas cotidianas, de forma concreta, abandonando-se o aspecto abstrato da Matemática. Como discutido anteriormente, Garbi (2010) afirma que o Brasil está perdendo espaço e ocupando posições péssimas nas avaliações internacionais; ressalta também que estamos regredindo para uma Matemática empírica desenvolvida pelos povos antigos para resolver seus problemas práticos e estamos desvalorizando a preciosa contribuição dos gregos em tornar a Matemática uma ciência abstrata e complexa, não permitindo que os alunos sejam levados a pensar. Corroborando com Garbi (2010, p. 4) “a reintrodução de doses equilibradas de demonstração no ensino da Matemática é algo que precisa ser feito no Brasil sem mais delongas”.

Partindo desta linha de pensamento acreditamos que se provas e demonstrações matemáticas forem abordadas em sala de aula com significado, em especial para o aluno, se dará melhor e clara compreensão da importância da Matemática e do pensamento matemático.

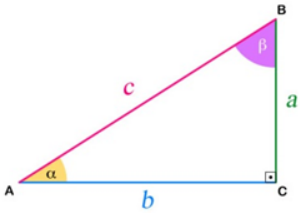
4.2 Conhecimento Matemático Da Dupla A

Esta seção diz respeito à Parte I da proposta didática, ou seja, ao vértice B. Esta categoria foi dividida em subcategorias representadas pelas atividades 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, isto é, sua solução pelos alunos Juliana e Willian.

4.2.1 Atividade 1

Figura 15 - Atividade 1 resolvida pela dupla A

(1)·(nossa·autoria)·Observem·o·triângulo·ABC·retângulo·em·C.·Com·base·em·suas·observações,·determinem·e·justifiquem:¶



¶

a)·Como·identificar·um·triângulo·retângulo?·¶
b)·os·catetos:·¶
c)·a·hipotenusa:¶
d)·o·ângulo·reto·(90°)¶
e)·os·ângulos·agudos¶

Resultados Esperados:

Que a dupla A, Juliana e Willian, saiba identificar os elementos que compõem o triângulo retângulo, obedecendo ás suas características.

Resultados Obtidos:

No item *a*, a pergunta era *Como identificar um triângulo retângulo?* Tendo como resposta da dupla A:

"Identificamos um triângulo retângulo quando o ângulo é igual a 90º".

Para identificar um triângulo retângulo a dupla A recorreu a uma característica necessária e suficiente, assim como afirmam Dolce e Pompeo (2005) "um triângulo é retângulo se, e somente se, tem um ângulo reto".

No item *b*, foi perguntado *como identificar os catetos?* A dupla A respondeu:

"Temos dois catetos, oposto e adjacente (lados)".

Consideramos a resposta da dupla A correta com relação à classificação dos catetos oposto e adjacente, pois para que isto ocorra seria necessário escolher um dos ângulos agudos: se o ângulo agudo da figura é α então o cateto oposto seria o lado a e o cateto adjacente seria o lado b. Se o ângulo agudo considerado fosse β, o cateto oposto seria o lado b e o cateto adjacente seria o lado a (DOLCE; POMPEO, 2005). Outra resposta poderia ser dada e considerada correta: os catetos são os lados que quando se intersectam dão origem ao ângulo reto

No item *c*, a pergunta foi*: como identificar a hipotenusa?* Obtivemos como resposta:

"É o lado maior do triângulo que, por sua vez, possui a maior inclinação".

Chamou nossa atenção a dupla A determinar que a hipotenusa seja o lado com maior inclinação. Este fato é curioso porque, mesmo estando correto, não é encontrado nos livros didáticos em vigência mas, sim, a hipotenusa como o lado oposto ao ângulo reto (DOLCE; POMPEO, 2005). No caso da figura o cateto (a) não tem inclinação, a inclinação do cateto (b) é zero; então, a hipotenusa é realmente o lado com maior inclinação.

No item *d* a pergunta era: *Como identificar o ângulo reto (90º)?* A resposta da dupla A foi:

"Encontro das duas semi-retas (B, C)".

Acreditamos que a dupla A quis dizer ser a intersecção das semi-retas $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. De acordo com Dolce; Pompeo (2005) o ângulo reto é o ângulo oposto à hipotenusa.

No item *e* a pergunta foi: *Como identificar os ângulos agudos?* Foi dado como resposta:

"Encontro entre duas semi-retas (A, B), que partem da mesma origem".

Como a semi-reta AB representa a hipotenusa, acreditamos que a dupla A percebeu que os ângulos agudos são formados pela intersecção da hipotenusa com os catetos.

A dupla Juliana e Willian desenvolveu atividade 1 mostrando que detém conhecimentos sobre os elementos de um triângulo retângulo. Em especial, notamos que a dupla A tem conhecimentos para identificar os elementos que formam o triângulo retângulo, ressaltando equívocos em algumas representações que não mostraram ser problema para atingir os resultados esperados. O reconhecimento desses elementos é fundamental para conjecturar a expressão matemática definida como Teorema de

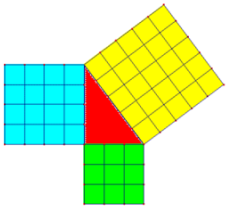
Pitágoras. Alunos com o nível de conhecimento como o de Juliana e Willian, se enquadram no *nível 1 dentre os níveis de Van Hiele*, no qual o aluno identifica as figuras geométricas via suas propriedades, sem fazer relação entre elas (NASSER, 1990). Salienta-se que não estamos obedecendo à formalidade nem ao rigor matemático quando analisada a resolução da atividade 1, pelos alunos da dupla A. Estamos, na verdade, dando crédito ao conhecimento matemático de Juliana e Willian, pois ambos escreveram de acordo com o que sabiam.

4.2.2 Atividade 2

Figura 16 - Atividade 2 resolvida pela dupla A

(2) (nossa autoria) De acordo com Eves (2004) e Boyer (2010), os povos antigos, acerca de 3000 anos, como egípcios e babilônicos, sabiam que o triângulo de lados 3, 4 e 5 era retângulo, mas de acordo com Lima (2006), esses povos não tinham a necessidade de demonstrar esta afirmação.

Na Figura abaixo temos um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 unidades de comprimento:



Foram construídos quadrados com os lados desse triângulo. Esses quadrados foram divididos em quadrados menores, como vocês podem observar na Figura. Respondam:

a) Quantos quadradinhos tem o quadrado maior?

b) Qual é o número de quadradinhos do quadrado intermediário?

c) Qual a quantidade de quadradinhos em que o quadrado menor foi dividido?

d) De acordo com as respostas dos itens a, b e c, vocês conseguem observar alguma

Resultados Esperados:

Que a dupla A, Juliana e Willian, faça a contagem e perceba a relação existente a partir dos resultados encontrados.

Resultados Obtidos:

A Dupla A não teve dificuldades em realizar esta atividade e o mais importante foi a dupla ter percebido a relação existente a partir dos resultados encontrados:

No item *a* perguntamos: *Quantos quadradinhos tem o quadrado maior?* A dupla A respondeu:

"O quadrado maior, apresenta 25 quadradinhos"

No item *b* perguntamos: *Qual é o número de quadradinhos do quadrado intermediário?* A resposta foi:

"O Quadrado intermediário contém 16 quadradinhos."

No item *c* a pergunta estava relacionada ao quadrado menor: *Qual a quantidade de quadradinhos em que o quadrado menor foi dividido?* A resposta:

"O quadrado menor, apresenta 9 quadradinhos".

Por fim, o item *d*, que nesta atividade classificamos como entendimento dos itens *a*, *b* e *c*, tivemos como resposta:

"A relação que se pode observar, é que a soma dos quadrados menores é igual ao número do quadrado maior".

A dupla A observou a relação existente atribuída ao Teorema de Pitágoras, entre os itens *a, b e c*; apesar disso não significa que a dupla A associou a conjectura no item *d* com o Teorema de Pitágoras. Do ponto de vista de Rezende; Nasser (1994), a dupla pesquisada poderia recorrer à figura 16 para provar o Teorema de Pitágoras. De acordo com esses autores o aluno pode mostrar, através de uma figura, porque o resultado é verdadeiro. Esta prova está classificada como Justificativa gráfica (REZENDE; NASSER, 1994).

4.2.3 Atividade 3.

Figura 17 - Atividade 3 resolvida pela dupla A.

(3) (extraído de Bastian, 2000) No quadro abaixo, a medida de cada cateto e da hipotenusa são lados dos quadrados A, B e C respectivamente. Com base nesta informação, calculem as áreas A, B e C:

			Áreas dos Quadrados		
Cateto a	**Cateto b**	**Hipotenusa c**	**Área A**	**Área B**	**Área C**
3	**4**	**5**			
6	**8**	**10**			
5	**12**	**13**			
9	**12**	**15**			

a) Comparando as áreas A, B e C, a que conclusão vocês chegaram?

b) Será que a conclusão descrita acima, no item (a), vale para qualquer triângulo? Experimentem usá-la em um triângulo de lados 4, 7 e 8. O que vocês observaram?

Resultados esperados:

Que calculem as áreas dos quadrados de acordo com as informações dadas, que consigam relacionar esses resultados enxergando que em todos os casos se somando os resultados encontrados para a área A, com os resultados encontrados para a área B são iguais aos resultados encontrados para a área C, que consigam fazer um paralelo entre esses resultados e o Teorema de Pitágoras, que percebam que em todos os casos existe um padrão, e que esses resultados fortalecem, solicitados na Atividade 2.

Resultados Obtidos:

De início, a dupla A efetuou corretamente os cálculos das áreas A, B e C:

Figura 18 – Respostas da atividade 3 resolvida pela dupla A.

			Áreas dos Quadrados		
Cateto a	**Cateto b**	**Hipotenusa c**	**Área A**	**Área B**	**Área C**
3	4	5	9	16	25
6	8	10	36	64	100
5	12	13	25	144	169
9	12	15	81	144	225

No item *a*, perguntamos: *Comparando as áreas A, B e C, a que conclusão vocês chegaram?* Obtivemos a seguinte resposta:

"Chegamos a conclusão que se formarmos um triângulo com a soma das áreas obtidas, esse triângulo seria escaleno onde todos seus lados são diferentes. (porque soma das áreas são diferentes)".

Somando a Área A com a Área B, resulta na Área C; neste caso, Juliana e Willian afirmaram que o resultado dessas áreas seria um triângulo escaleno. A dupla A associou os resultados obtidos das áreas A, B e C com lados de um triângulo, classificando-o como triângulo escaleno. Esta afirmação está incorreta pois a condição de existência de um triângulo não permite essa conjectura, como mencionam Dolce; Pompeo (2005) que para construir um triângulo, é necessário que a medida de qualquer um dos lados seja menor que a soma das medidas dos outros dois e maior que o valor absoluto da diferença entre essas medidas.

No item *b* a pergunta foi a seguinte: *Será que a conclusão descrita acima, no item (a), vale para qualquer triângulo? Experimente usá-la em um triângulo de lados 4, 7 e 8. O que vocês observaram?* Tivemos, como resposta:

“Não, vale apenas para o escaleno, triângulo escaleno, nesse caso a afirmação acima valeria para esse triângulo”.

No item *b*, a dupla Juliana e Willian observou a mesma relação do item *a*, ou seja, a dupla foi induzida ao erro.

Na tentativa de provar suas afirmações nos itens *a* e *b* da atividade 3, a dupla A fez recorrência a uma figura (Apêndice E). Nesta perspectiva os alunos Juliana e Willian mostraram, através de uma figura, o porquê de seu resultado ser verdadeiro. Eles fizeram uso da justificativa gráfica (REZENDE; NASSER, 1994).

Em virtude da dupla A ter realizado os cálculos do quadro inicial corretamente, cometeram erros nos itens *a* e *b*; concluímos que Juliana e Willian têm dificuldade de relacionar o Teorema de Pitágoras com outras situações que não seja a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$. Isto pode ser um entrave para a resolução das atividades seguintes.

4.2.4 Atividade 4

Figura 19 - Atividade 4 resolvida pela dupla A.

a) Desenhem e recortem um triângulo retângulo qualquer. Agora desenhem e recortem mais sete triângulos idênticos ao primeiro, identificando seus referidos lados como a, b e c.

b) Agora desenhem e recortem um:

- ✓ → Quadrado de tamanho igual ao lado *a* (pinte de vermelho)
- ✓ → Quadrado de tamanho ao lado *b* (pinte de amarelo)
- ✓ → Quadrado de tamanho ao lado *c* (pinte de verde)

c) como se fosse um quebra cabeças montem:

- ✓ → Um quadradão usando quatro triângulos e o quadrado vermelho
- ✓ → Um quadradão usando quatro triângulos e os quadrados amarelos e verdes
- ✓ → Se retirarmos das duas figuras montadas os quatro triângulos, o que podemos dizer sobre as áreas restantes de cada figura?
- ✓ → Existe alguma relação entre as áreas restantes? Como podemos escrever esta relação?

Resultados esperados:

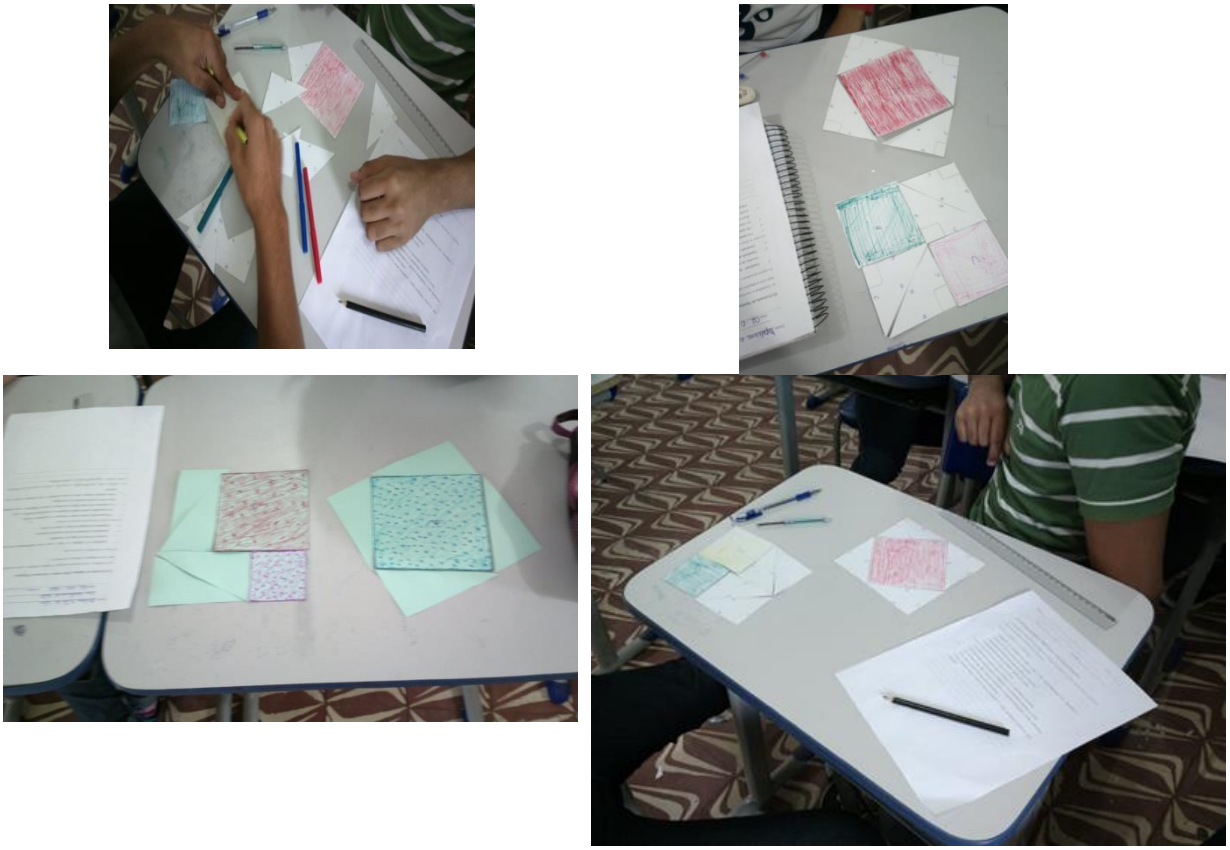
Que consigam visualizar o que acontece com as áreas de ambos os “quadradões”, após retirada as peças determinadas no item *c*, que tenham o maior envolvimento na resolução desta atividade devido ao fato de que é uma atividade que

precisa da participação dos alunos para construir o material necessário para a montagem da questão em que, após a construção e montagem do quebra-cabeça os alunos cheguem a perceber a relação existente entre as figuras.

Resultados obtidos:

Percebemos que esta atividade empolgou a dupla Juliana e Willian por terem sido os responsáveis pela sua construção tendo em vista que todo o material necessário foi desenvolvido por eles:

Foto 2 – Dupla A construído o quebra-cabeças envolvendo o Teorema de Pitágoras.



Após a execução da atividade 4 foi pergutando, à dupla A: *Existe alguma relação entre as áreas restantes? Como podemos escrever esta relação?* A resposta foi a seguinte:

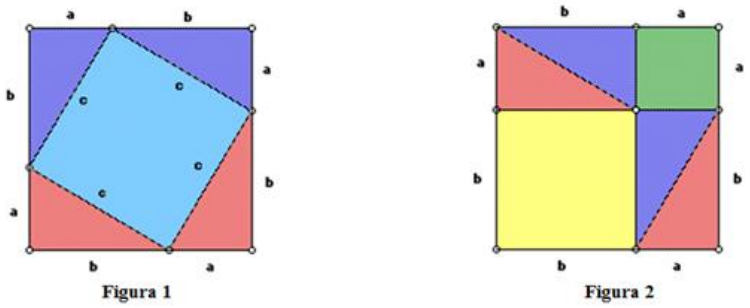
"A relação que se pode observar é que a soma dos quadrados menores era igual a área do quadrado maior que esta diretamente relacionada com o Teorema de Pitágoras".

A dupla Juliana e Willian, através da construção e da montagem do material, visualizou que o Teorema de Pitágoras estava relacionado com as áreas das figuras. Outra atividade em que os alunos Juliana e Willian poderiam ter recorrido à Justificativa gráfica (Rezende; Nasser, 1994) para atestar a veracidade do Teorema de Pitágoras.

Para Brasil (1998) a partir da observação de material concreto é possível caminhar através de conjecturas que enveredem para a formalidade dos elementos matemáticos. Experiências desse tipo proporcionam, aos alunos, momentos de descobertas através da tentativa e erro e através de observações realizadas no desenvolver das tarefas. De acordo com Bastian (2000, p. 128), “com esta atividade torna-se possível reinvestir em tópicos que deveriam fazer parte dos conhecimentos disponíveis do aluno e, ao mesmo tempo, evidenciar a importância de um tratamento mais rigoroso”. De acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p. 44), “numa outra direção, as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca”. Os PCN (BRASIL, 1998) também destacam a utilização de materiais concretos pelos professores como recurso alternativo que pode tornar bastante significativo o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

4.2.5 Atividade 5

Figura 20 - Atividade 5 resolvida pela dupla A.



a) Descrevam algebricamente a área do quadradão (Figura 1) em função do quadrado contido nele e dos quatros triângulos retângulos.

b) Façam o mesmo na Figura 2.

c) Que relação existe entre as áreas dos quadradões das Figuras 1 e 2? Deduzam a relação entre a, b e c.

Resultados esperados:

Que os alunos formalizem de maneira mais rigorosa os dados obtidos na atividade 4.

Resultados Obtidos:

No item *a*, foi solicitado que: *Descrevam algebricamente a área do quadradão (Figura 1) em função do quadrado contido nele e dos quatro triângulos retângulos.* E Juliana e Willian responderam:

$$“a^4 + b^4 + c^4”$$

Nesta atividade as figuras 1 e 2 fornecem uma prova denominada como justificativa gráfica (Rezende; Nasser, 1994) para o Teorema de Pitágoras. alunos Juliana e Willian poderiam observar as figuras 1 e 2 e ter explicado a relação existente entre elas, o que está explicação de acordo com as Palavras de De Villiers (2010) uma prova matemática também tem a finalidade de compreensão o por que uma afirmação é verdadeira.

No entanto a dupla Juliana e Willian não conseguiu observar a decomposição do quadrado em quatro triângulos e um quadrado menor. O que nos causou curiosidade foi que a dupla A sabia que a área de um triângulo podia ser calculada através da metade do produto da base pela altura, pois foi dito, por eles durante a resolução da atividade, mas não conseguiram observar esta característica na figura. Outro problema alegado pela dupla é que se fossem utilizados números na atividade proposta seria mais fácil de entender, o que deixa claro a valorização da aritmética à dificuldade da dupla em algebrizar a Matemática.

No item *b*, o mesmo deveria ter sido feito, mas a dupla deixou em branco:

No item *c* foi perguntado: *Que relação existe entre as áreas dos quadradões das Figuras 1 e 2? Deduzam a relação entre a, b e c.* Novamente a dupla Juliana e Willian deixou em branco:

Como resultado da atividade 5 a dupla, na tentativa de responder ao item *a* escreveu apenas $a^4 + b^4 + c^4$. Esta situação parece estar coligada à costumeira metolologia utilizada para ensinar o Teorema de Pitágoras (LORENZATO, 1993); isto é, uma metodologia resumida apenas ao uso da fórmula $a^2 = b^2 + c^2$, o que não faz nenhum sentido para o aluno e não possibilita a compreensão do enunciado do Teorema. A dificuldade em visualizar e trabalhar com conceitos de álgebra é oriunda da metodologia do professor em suas aulas por optar privilegiar os conteúdos aritméticos.

Ministra conteúdos álgebricos de forma a enfatizar a memorização de fórmulas e regras a serem utilizadas em resolução de expressões algébricas (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992).

De acordo com os PCN, na educação básica o ensino da álgebra e da aritmética deve ser interligado. O ensino da álgebra é ministrado com um pouco mais de abstração a partir do 8º ano da educação básica, com estudo dos monômios e polinômios como limiar para a utilização das primeiras regras algébricas. De acordo com com os PCN (BRASIL, 1998, p. 44):

> O currículo do Ensino Médio deve também garantir espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio-histórica que está na origem desses temas. Estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e na intervenção no real.

A dupla Juliana e Willian não conseguiu identificar a relação entre as áreas da Figuras 1 e 2 o que nos mostra a falta de observação da dupla de perceber que as Figuras deveriam ser analisadas com um olhar na parte e não no todo que, de acordo com Bastian (2000), isto ocorre devido ao contrato didático do professor em que o aluno não consegue visualizar e analisar parte e todo, assim como a falta de compreensão de utilização de conceitos algébricos.

4.2.6 Atividade 6

Figura 21 - Atividade 6 resolvida pela dupla A.

(6) (nossa autoria) Um teorema é uma afirmação matemática que deve ser rigorosamente demonstrada. Sendo assim, para que o Teorema de Pitágoras seja válido é necessário demonstrá-lo. Podemos escrever o Teorema de Pitágoras na forma implicativa: ***Se o triângulo é retângulo então a área do quadrado que tem como lado a medida da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos catetos são os lados.***

No Teorema escrito na forma implicativa, identifiquem:

a) Hipótese

b) Tese

Resultados esperados:

Que os alunos identifiquem a hipótese e a tese do Teorema.

Resultados obtidos:

No item *a* foi solicitou-se que a dupla A identificasse a hipótese do Teorema:

"Se o triângulo é retângulo".

No item *b* foi pedido a tese:

"Então a área do quadrado que tem como lado a medida da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos catetos são os lados".

Na atividade 6 a dupla Juliana e Willian reconheceu de forma correta a hipótese e a tese do Teorema de Pitágoras escrito na forma condicional.

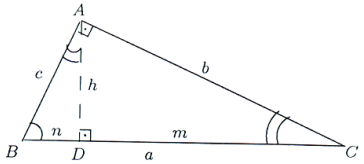
Se atividades com esses aspectos fossem desenvolvidas em sala de aula despertariam o interesse dos alunos em escrever matematicamente. Isto nos mostra que alunos quando colocados diante de situações que possibilitem suas participações de forma direta e que deixem espaços para poder mostrar suas capacidades, se sentem à vontade para expor seus raciocínios.

4.2.7 Atividade 7

Figura 22 - Atividade 7 resolvida pela dupla A.

(7) (adaptado de Lima, 2006)

No triângulo ABC, retângulo em A, a altura AD (perpendicular a BC) relativa à hipotenusa origina dois triângulos semelhantes ao próprio triângulo, em vista da congruência dos ângulos (BÂD = $\widehat{C}$, complemento de $\widehat{B}$, CÂD = $\widehat{B}$, complemento de $\widehat{C}$). Portanto, temos proporcionalidade entre os lados homólogos, uma para cada triângulo parcial ou total:



$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \; e \; \frac{b}{a} = \frac{m}{b}$$

Usando as informações acima, tentem demonstrar o Teorema de Pitágoras.

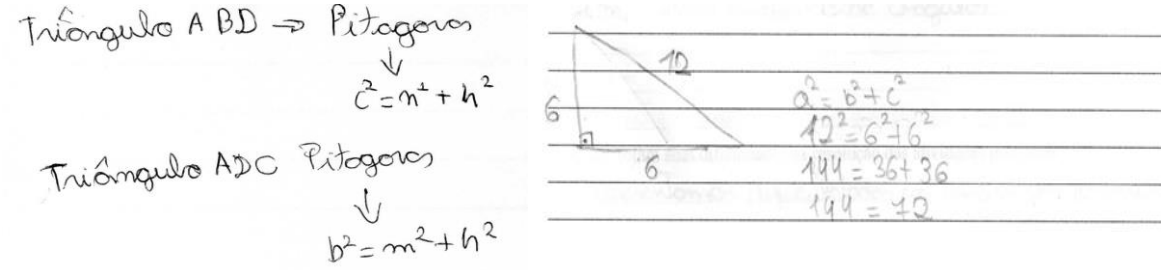
Resultados esperados:

Que consigam demonstrar o Teorema de Pitágoras levando em consideração o desenvolvimento das atividades até o momento, que consigam visualizar e entender o significado de uma demonstração.

Resultados obtidos:

A dupla Juliana e Willian associou uma demonstração do Teorema à formula $a^2 = b^2 + c^2$:

Figura 23 - Resposta da atividade 7 resolvida pela dupla A.



Na atividade 7 aplicando a propriedade fundamental das proporções (em toda a proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos) chegaríamos à seguinte conclusão: $a^2 = b^2 + c^2$, na qual o aluno poderia atestar a demonstração dizendo que a mesma está demonstrada por se encontrar no livro didático tendo em vista que esta demonstração é a mais encontrada nos livros didáticos e a mais utilizada em sala de aula (LIMA, 2006 e BARBOSA, 1993). Esta justificativa está classificada como recorrência a uma autoridade (NASSER; TINOCO, 2003). Segundo essas autoras, o aluno pode afirmar que o resultado é verdadeiro porque o professor falou ou porque está no livro.

A dupla Juliana e Willian tentou demonstrar o Teorema de Pitágoras, utilizando um exemplo específico. Na visão de Rezende; Nasser (1994), a prova de Juliana e Willian é classificada como *exemplo crucial*: o aluno desenvolve, através de um exemplo, o raciocínio que poderia ter sido feito para o caso geral ou ainda podemos classificar este indício de prova do Teorema de Pitágoras como recorrência a uma autoridade (Rezende; Nasser, 1994), porque acreditamos que a dupla A Juliana e Willian fizera uso deste modelo por ser algo presente no livro didático e também trabalhado pelo professor em sala de aula.

Não podemos deixar de destacar alguns erros cometidos pela dupla nesta demonstração. O primeiro erro se refere à condição de existência de um triângulo, em que para construir um triângulo, é necessário que a medida de qualquer um dos lados seja menor que a soma das medidas dos outros dois, que podemos observar ter este erro proporcionado outro, em que a equação não foi satisfeita. Por conta dos erros cometidos pela dupla A, podemos afirmar que a demonstração do Teorema não é válida.

Chegamos à conclusão de que o conhecimento matemático da dupla A não é suficiente para a compreensão do Teorema de Pitágoras criando, assim, obstáculos para desenvolver a demonstração do Teorema (NASSER; TINOCO, 2003).

4.2.8 Comentários

Com os resultados obtidos na proposta didática chegamos à conclusão de que a dupla A reconhece elementos do triângulo retângulo como hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente. Esses são elementos primordiais para o enunciado do Teorema de Pitágoras cujo conhecimento inicial da dupla Juliana e Willian se enquadra na classificação do Nível 1, de Van Hiele, em que alunos conhecem elementos de uma figura geométrica mas não enxergam a relação entre eles; isto pode ser observado no desenvolver das outras atividades da proposta sempre que a dupla A foi resolvendo a proposta didática percebemos que surgiram dificuldades em compreender o Teorema de Pitágoras, a não ser sua fórmula $a^2 = b^2 + c^2$. Observamos que, à medida em que foram sendo requisitados conhecimentos mais apurados dos alunos em relação ao Teorema, eles tiveram dificuldades em relacionar os elementos que eles mesmos identificaram na primeira atividade com as demais, ou seja, em todas as atividades o Teorema de Pitágoras estava presente, algo despercebido pela dupla A.

Outro aspecto detectado foi o pouco conhecimento da dupla A em utilizar a álgebra para resolver problemas matemáticos. Sempre que necessário algebrizar, os alunos Juliana e Willian mostraram dificuldades em entender o contexto da atividade. Percebemos que a dupla A tem conhecimento superficial do Teorema de Pitágoras, apenas agregando a expressão $a^2 = b^2 + c^2$, o que, de acordo com Morais Filho (2010), é consequência direta da metodologia utilizada pelo professor em sala de aula.

Percebemos que o conhecimento matemático da dupla A se encontra de forma fragmentada e mecânica, o que dificulta a exploração deste conhecimento para resolver atividades fora do contexto da sala de aula.

Por fim, podemos concluir que o nível de conhecimento matemático da dupla A e a maneira como este conhecimento está organizado dificultou o resolver as atividades da proposta didática. Por este motivo a dupla A não conseguiu demonstrar o Teorema de Pitágoras, o que poderia ter ocorrido nos modelos de provas matemáticas citados por Rezende; Nasser (1994). Os modelos de provas matemáticas classificados por Rezende;

Nasser podem ser considerados prova ingênua, segundo Hanna (2006) e Balacheff (1988c).

4.3 Avaliação da intervenção e proposta didáticas pela dupla a

Esta seção se deu por meio da intervenção didática do questionário final, pós-aplicação da proposta didática, com o objetivo de investigar a avaliação atribuída pela dupla A sobre as atividades da proposta didática e da intervenção didática. A seção foi dividida em uma subseção indicada por 4.3.1.

4.3.1 Questionário Final

O questionário final pode ser visualizado na Figura 24.

Figura 24 - Questionário final.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL
EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

PROPOSTA DIDÁTICA
DESAFIANDO NOSSO PENSAMENTO MATEMÁTICO
(QUESTIONÁRIO FINAL – ALUNOS)

Data: _____

Dupla:_____

_____

1. Qual o seu ponto de vista em relação à aplicação da proposta didática?
2. No seu entendimento, qual foi o objetivo da aplicação da proposta didática?
3. Ao resolver as atividades propostas você percebeu alguma relação entre elas?
4. Quais foram suas dificuldades na resolução das atividades propostas?
5. Expliquem suas respostas em cada atividade

Atividade 1:
Atividade 2:
Atividade 3:
Atividade 4:
Atividade 5:
Atividade 6:
Atividade 7:

6. De acordo com os seus conhecimentos, construa uma demonstração para o Teorema de Pitágoras.
7. Descreva o que foi a intervenção didática para cada um de vocês da dupla.
8. A intervenção didática auxiliou cada um de vocês na resolução da proposta didática? Se sim, explique. Se não, justifique.

Fonte: Elaborado pelo autor.

As questões 1, 2, 3 e 4 do Questionário tiveram, como objetivo, obter informações sobre aspectos relevantes da aplicação da proposta didática, como dificuldade encontrada pelos alunos na sua resolução e a percepção deles em relação ao objetivo da proposta. A quinta questão foi desenvolvida com o objetivo de entender o significado das respostas atribuídas pelos alunos a cada atividade. A sexta questão foi feita para que os alunos tivessem a oportunidade de demonstrar o Teorema de Pitágoras de acordo com seu conhecimento. Na sétima questão cada aluno da dupla escreveu sua opinião sobre a intervenção didática. Para finalizar, a oitava questão veio com o propósito de fazer com que o aluno escrevesse o que ele entendeu ou não, através da intervenção didática.

Na primeira questão do questionário final, foi perguntado:

Qual o seu ponto de vista em relação à aplicação da proposta didática?

Obtivemos como resposta:

"Foi positivo, para a avaliação do nosso conhecimento matemático".

Na questão dois, indagamos:

No seu entendimento, qual foi o objetivo da aplicação da proposta didática?

Obtivemos, como resposta:

"Analisar como andam os conhecimentos dos alunos sobre a matéria dada em sala de aula".

Na questão três, foi perguntado:

Ao resolver as atividades propostas você percebeu alguma relação entre elas?

A resposta dada foi a seguinte:

"Sim, todos falam sobre ângulos".

A questão quatro:

Quais foram suas dificuldades na resolução das atividades propostas?

Resposta da dupla A:

"Apresentados dificuldades em lembrar das fórmulas".

De acordo com as afirmações da dupla A com relação às quatros questões acima, podemos afirmar que as atividades desenvolvidas por eles durante a aplicação da proposta didática proporcionaram a avaliação e o conhecimento matemático de ambos.

A aplicação da proposta didática também, de acordo com a dupla A, fez com que Juliana e Willian se deparassem com algumas de suas dificuldades matemáticas.

Ressaltamos que elaboramos a proposta didática para que os alunos envolvidos na pesquisa percebessem o caminhar até uma prova matemática; constatamos, de acordo com as respostas, que eles não atentaram para este percurso.

A partir da quinta questão inserida no questionário final, a dupla participante da pesquisa deveria explicar raciocínios desenvolvidos para a resolução de cada atividade. Sendo assim, temos:

Atividade 1: "Nesta questão, identificamos um triângulo retângulo, porque seu ângulo é igual a 90º, entre outras características que mostram que este é um triângulo retângulo como hipotenusa, cateto oposto e adjacente".

A dupla A, como já mencionado, justificou com clareza como resolveu a atividade 1.

Atividade 2: "Nesta questão concluímos que a soma dos quadrados menores era a soma do quadrado maior".

A dupla A, sobre a atividade 2, foi capaz de explicar, de forma coerente, o que foi proposto.

Atividade 3: "Nesta questão concluímos que, se usássemos os números fornecidos, ele apresentaria um triângulo escaleno, com todos os seus lados diferentes".

A justificativa da dupla A com relação à atividade 3 explicita que Juliana e Willian não compreenderam a proposta da atividade.

Atividade 4: "Nós fizemos tais atividades a partir dos recortes de triângulos retângulos e quadrados, por nós desenhados e, a partir dos mesmos, percebemos a relação que uníssemos esses triângulos com quadrados obteríamos um quadrado maior que o feito por nós".

Apesar de Juliana e Willian descreverem a construção que realizaram na atividade 4, não se deram conta da questão de relação parte e todo.

Atividade 5: "Não conseguimos fazer esta questão, pois como era álgebra e não números, ficou difícil o entendimento para que chegássemos à função pedida pela questão".

Ao explicitar a atividade 5, a dupla A pontua sua falta de conhecimento algébrico e dificuldades quando da manipulação algébrica.

Atividade 6: "Nesta questão, chegamos à conclusão de que, para que fosse feita uma afirmação matemática, precisaríamos de uma hipótese o que é levantado e uma tese que ratifica essa hipótese".

Excepcionalmente e com relação à atividade 6, a dupla A justificou a mesma de forma matemática, isto é, utilizou, em sua justificativa, linguagem matemática apropriada e adequada.

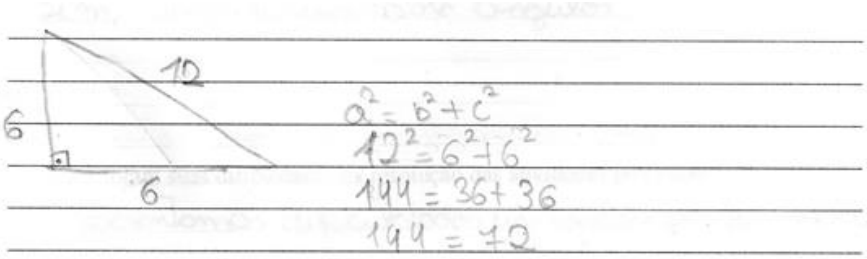
Atividade 7: Nesta questão retiramos dados acerca da hipotenusa, cateto oposto e adjacente, chegando a inseri-los no Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$.

Apesar da dupla A justificar a resolução da atividade 7, de forma correta, sua proposta era demonstrar o Teorema de Pitágoras, algo provavelmente não percebido por Juliana e Willian.

Voltando às questões do questionário final, na sexta questão foi solicitado, à dupla A, formada por Juliana e Willian, que demonstrasse ou fizesse uma prova para o Teorema de Pitágoras de acordo com seus conhecimentos.

Demonstração feita pela Dupla A:

Figura 25 - Resposta da questão 6 do questionário final.



Na questão 6 Juliana e Willian foram postos diante de uma atividade que solicitava uma demonstração do Teorema de Pitágoras de acordo com o conhecimento matemático da dupla; observamos que, novamente, a dupla A, ao tentar demonstrar o Teorema de Pitágoras, associou a demonstração à expressão $a^2 = b^2 + c^2$.

Sugeriu-se na penúltima questão do questionário final, que cada aluno da dupla participante da pesquisa descrevesse o que foi a intervenção didática; a seguir, as resposta dos alunos Juliana e Willian; traremos inicialmente, as respostas da aluna Juliana e, em seguida, mostraremos o que foi respondido pelo aluno Willian.

Visão de Juliana em relação à questão sete do questionário final:

"A proposta didática foi muito promissora pois nos fez relembrar alguns conceitos básicos sobre ângulos que já tínhamos visto e, por falta de atenção, dentre outros fatores, passaram despercebidos; além disso, nos auxiliou a resolver problemas de outras áreas na Matemática de vez que o Teorema de Pitágoras é uma ferramenta fundamental na Matemática".

Na questão oito foi perguntado se a intervenção didática auxiliou a dupla Juliana e Willian na resolução das atividades da proposta didática.

Resposta da aluna Juliana para a oitava questão do quesionário final:

"Sim, sem antes haver essa intervenção é certo que não teríamos todo o conhecimento necessário para responder às questões propostas".

Nas questões 7 e 8 Juliana explicita que a intervenção didática teve sua importância em relembrar alguns conceitos que por motivos outros foram esquecidos por ela; outro ponto relevante destacado por Juliana, foi o de que a intervenção didática a auxiliou na resolução da proposta didática. Juliana deixa claro que "sem antes haver essa intervenção é certo que não tínhamos todo o conhecimento necessário para responder ás questões propostas".

Vejamos agora as respostas de Willian em relação às questões 7 e 8 do questionário final.

Como resposta para a questão 7 do questionário final, Willian disse:

"A intervenção didática do professor para mim foi alo de extrema importância para que pudéssemos desenvolver as questões solicitadas nesta atividade".

Na questão 8 o questionário final, Willian respondeu:

"Sim a intervenção nos auxiliou bastante na resolução das propostas, pois através dessa intervenção é que nos foi possível responder ao maior número possível de questões"

Willian, como Juliana, frisou a influência da intervenção didática na resolução da proposta didática. Segundo Willian, sem o auxílio da intervenção didática não teria sido possível resolver a maior parte das sete atividades.

4.3.2 Comentários

O questionário final mostrou que, apesar da intervenção didática ter proporcionado, à dupla A, novos conhecimentos matemáticos, ajudando-os na resolução das atividades da proposta didática ficou claro, mais uma vez, que o Teorema de Pitágoras, no entender de Juliana e Willian, está resumido à fórmula $a^2 = b^2 + c^2$. Com isso concluímos, com o nível de conhecimento da dupla A, que Juliana e Willian não tiveram, nem teriam condições de demonstrar o Teorema de Pitágoras, senão pela fórmula. Observamos também que apesar de todas as questões da proposta didática

estarem direcionada para uma prova ou demonstração matemática, os alunos da dupla A, Juliana e Willian, em nenhum momento atentaram para esses processos.

Outro aspecto observado foi a ausência do conhecimento algébrico, isto é, a capacidade de resolver uma atividade que exija manipulação algébrica.

4.4 Discussão final

Ante do estudo de caso apresentado, a visão dos alunos da dupla A, Juliana e Willian, em relação à Matemática, é a mesma, isto é, uma ciência importante para nossa vida que nos ajuda a resolver problemas. Esta ideia está correta de certa forma já que a Matemática não está resumida apenas em resolver problemas do cotidiano. A Matemática é uma ciência que, por natureza, obedece a um rigor e a uma formalização que deveriam ser introduzidos na educação básica para que os alunos tivessem oportunidade de pensar matematicamente.

O não desenvolvimento do raciocínio dedutivo dos alunos os leva a uma Matemática de resultados prontos, em que apenas se memoriza, desperdiçando o fascínio desta ciência. Esta visão provoca um ciclo vicioso em que, na educação básica, a Matemática está resumida a uma receita na qual se tem que seguir os passos, de forma metódica.

Este fato fica claro em nossa pesquisa quando a dupla A, em várias situações, entendeu o Teorema de Pitágoras apenas com a expressão $a^2 = b^2 + c^2$, ou seja, seja qual for à situação, o aluno imagina que, aplicando esta expressão, chegará à solução. Não é percebido que esta fórmula é um meio e não o fim para a resolução de atividades; sem esta visão, com dificuldades em compreender o enunciando deste Teorema e com dificuldades em utilizar recursos algébricos, torna-se bastante difícil o ato de demonstrar, matematicamente falando.

Chegamos à conclusão de que existe um conhecimento matemático superficial cujos conteúdos matemáticos são memorizados e não compreendidos pela dupla A. Existe uma mecanização oriunda da metodologia utilizada em sala de aula que não permite ao aluno enxergar além do que é ensinado pelo professor. Nasser; Tinoco (2003) afirmam esta falta de criatividade nas aulas de Matemática quando dizem que os alunos não estão sendo colocados para racionar matematicamente. O conhecimento geométrico da dupla Juliana e Willian se enquadra na classificação do Nível 1 de Van Hiele, em que alunos conhecem elementos de uma figura geométrica mas não enxergam

a relação entre eles. Por este e outros motivos, a dupla A não conseguiu demonstrar o Teorema de Pitágoras, o que poderia ter ocorrido nos modelos de provas matemáticas citados por Rezende; Nasser (1994). Os modelos de provas matemáticas, classificados por esses autores podem ser considerados prova ingênua, segundo Hanna (2006) e Balacheff (1998a).

Não é suficiente apenas o aluno ter uma visão geral da Matemática, mas que ele entenda e perceba o poder revelador desta ciência; para isto, faz-se necessário uma nova visão, principalmente por parte do professor porque, se for para haver mudanças no processo de ensino da Matemática, o professor deve estar disposto a rever os seus conceitos, crenças e metodologias.

O que se pode afirmar, hoje, sobre o ensino da Matemática no Brasil, é que não são apresentadas situações aos alunos que os levem a desenvolver o raciocínio dedutivo (NASSER; TINOCO, 2003), ou seja, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática não se prepara os alunos a pensar, comunicar ou explicar seus resultados acarretando baixa assimilação de conteúdos. Os alunos não são capazes de reconhecer, explicar nem justificar, quando são questionados sobre conteúdos básicos e bastante conhecidos da Matemática.

Acreditamos que a apresentação do Teorema de Pitágoras na educação básica, conforme anuncia Morais Filho (2010) acontece de forma não compreendida pelos alunos.

A dificuldade dos alunos em conhecer e demonstrar o Teorema de Pitágoras fica claro nas pesquisas realizadas por Santos; Lins (2013a e 2013b) nas quais metade dos professores pesquisados conhece apenas uma das diversas demonstrações existentes sobre o Teorema de Pitágoras, baseada em semelhanças de triângulos. Constatamos também o uso apenas do quadro negro pelos professores como recurso utilizado para trabalhar a demonstração do Teorema trazida nos livros didáticos. Nesta perspectiva o modo como o Teorema de Pitágoras é ensinado aos alunos não permite uma compreensão maior de seu enunciado, originando grande dificuldade em demonstrá-lo levando em consideração que professor não selecionar demonstrações que permitam a participação direta do aluno nem a utilização de materiais didáticos que desperte no aluno o interresse em compreender o porquê da necessidade de uma demonstração. A interação do aluno com este tipo de demonstração permite despertar seu interesse e aguçar sua criatividade, tornando-o agente ativo na construção de seu conhecimento.

Independente de ser demonstrado ou não, o ensino do Teorema de Pitágoras, de acordo com os resultados obtidos nesta pesquisa, deve ser repensando e executado de forma a permitir, ao aluno, aprender conceitos básicos para que possam ser utilizados em situações futuras. Pelo visto, o modo como está sendo apresentado o Teorema de Pitágoras não favorece a compressão dos alunos para o verdadeiro significado deste enunciado matemático. Para eles, o Teorema de Pitágoras está resumido em uma fórmula matemática, sem qualquer ligação com outras atividades. De acordo com Roque (2014) a utilização de forma contínua da exposição dos conteúdos matemáticos contidos nos textos matemáticos, inibe o entendimento de conceitos atribuindo, à Matemática, o papel de ciência pronta, acabada.

Roque (2014) aponta que o Teorema de Pitágoras é apresentado obedecendo a uma ordem lógica:

> Definição 1: Um triângulo é retângulo se contém um ângulo reto.
> Definição 2: Em um triângulo retângulo o maior lado é chamado hipotenusa e os outros dois são chamados catetos.
> Teorema: Em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.
> Problema: Desenho um triângulo retângulo de catetos 3 e 4 e pergunto o valor da hipotenusa (ROQUE, 2014. p. 30).

De acordo com Roque (2014) do modo como está sendo feito várias perguntas deixam de ser respondidas; elas ficam escondidas através do modo ordenado como o Teorema de Pitágoras é anunciado, inibindo a capacidade dos alunos de enxergar além de perceberem outras situações em que o Teorema de Pitágoras pode ser aplicado.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Realizamos esta pesquisa, estudo de caso, com o objetivo de investigar as possibilidades de provas matemáticas do Teorema de Pitágoras a partir de uma proposta didática aplicada a alunos do 3º ano do Ensino Médio. Com isto, a pergunta que norteou nossa pesquisa, foi: *Que tipos de provas matemáticas podem ocorrer a partir de uma proposta didática com o Teorema de Pitágoras, por alunos do 3º Ano do Ensino Médio?*

Para responder à pergunta norteadora e atingir o objetivo de nossa pesquisa utilizamos, como instrumentos, uma intervenção didática, uma redação, uma proposta didática e um questionário final.

Para adentrarmos na temática da pesquisa, formamos uma equipe denominada Provas e Demonstrações Matemáticas que estava inserida num projeto maior, CAPES/OBEDUC, em rede, envolvendo três universidades, UFMS, UEPB e UFAL. A equipe foi formada por um professor doutor, um mestrando, dois graduandos em Matemática da UEPB e dois professores de Matemática da educação básica que lecionavam na escola em que a pesquisa seria desenvolvida. Para início dos estudos a equipe se debruçou em leituras de trabalhos desenvolvidos por diversos autores, como Hanna, Balacheff, De Villiers, Almouloud e Nasser, entre outros. As leituras eram feitas com o objetivo de provocar discussões, reflexões e proporcionar condições para o desenvolvimento de uma proposta didática que seria aplicada na escola em que a pesquisa seria realizada. Nos encontros da equipe procurávamos sempre proporcionar um ambiente que permitisse o compartilhamento de experiências, saberes e questionamentos, em que cada membro da equipe se sentisse aberto para comunicar suas sugestões, dúvidas, experiências e reflexões sobre os textos que dissertavam sobre o tema em questão.

A proposta didática que nasceu desses momentos de estudos realizados pela equipe provas e demonstrações matemática trouxe à tona a questão da utilização de provas e demonstrações matemáticas na educação básica.

Nos referenciais teóricos, nos deparamos com autores que enfatizam a importância que o processo de provar a veracidade de uma afirmação matemática tem para a construção do saber matemático. Na visão desses autores o processo, medindo suas proporções, deve fazer parte do currículo escolar. No Brasil esta discussão ainda se

encontra em fase inicial mas na Europa, por exemplo, países como Inglaterra e França, já contemplam as aulas de Matemática com esses processos.

Ao iniciar a construção da proposta didática, nos deparamos com alguns questionamentos e barreiras que inquietavam o nosso raciocínio, como por exemplo: quais atividades deveríamos utilizar para que contemplassem o processo de provar ou demonstrar matematicamente? Como organizar estss atividades de forma que as mesmas venham contribuir para que o aluno perceba que a atividade necessita de uma comprovação? Além dessas, não podemos deixar de citar as dificuldades oriundas das divergências de crenças e concepções dos componentes que faziam parte da Equipe provas e demonstrações matemáticas, mostrando que para trabalhar em equipe se necessita saber lidar com dificuldades que poderão existir e de estar preparado para amenizá-las.

Após a aplicação da proposta didática e análise dos dados, nos deparamos com uma série de resultados que demonstram o grau de familiaridade dos alunos com esses processos.

Um dos resultados mais claros desta pesquisa, é que, para se pensar em desenvolver atividades que venham contemplar o processo de provar ou demonstrar matematicamente deve-se, antes trabalhar os conceitos de álgebra e geometria para que essas áreas da Matemática sirvam de suporte para amenizar as dificuldades encontradas nos passos visando desenvolver uma prova matemática.

Os dados analisados mostram que a falta de conhecimentos dos conceitos da álgebra e da geometria acarreta dificuldades para os alunos resolverem problemas matemáticos acarretando na desmotivação e na falta de compreensão do mesmo.

Outro resultado detectado pela pesquisa foi que os alunos relacionam provas e demonstrações matemáticas com a importância que a Matemática tem em nossas vidas na resolução de problemas do cotidiano. O mais próximo que os alunos envolvidos na pesquisa conseguiram chegar ao conceito de provar e demonstrar, foi quando procuraram explicar que uma afirmação matemática é poder provar se um cálculo está correto ou não o que, no conceito de Hanna e Balachef, já poderia ser classificado como uma prova ingênua.

Destacamos também que apesar do Teorema de Pitágoras ser abordado no 9º ano, os alunos que se encontram cursando o último ano do ensino médio são detentores de conhecimentos superficiais que não lhes permite aplicar este conhecimento fora do contexto da sala de aula ou além do que foi exposto pelo professor.

No entendimento dos alunos envolvidos na pesquisa, provar ou demonstrar o Teorema de Pitágoras é aplicar a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$. Os alunos da dupla A, Juliana e Willian não têm conhecimento da necessidade de provar ou demonstrar o Teorema de Pitágoras; detectamos, então, que os indícios de provas e demonstrações desenvolvidas por eles na se enquadram nos moldes detectados por Rezende; Nasser (1994) e que também eles não desenvolveram o que Hanna e Balacheff denominam de prova ingênua diante disto, podemos concluir que os alunos Juliana e Willian não conhecem tipo algum de prova ou demonstração para o Teorema de Pitágoras nem entendem o porquê desta afirmação matemática necessitar de uma demonstração.

Percebemos também que a aplicação da proposta didática colocou os alunos em uma situação à que os mesmos não estão habituados, ou seja, foram postos diante de situações que fogem do contrato didático. Os alunos vivenciaram atividades até então pouca ou não exploradas até aquele momento de sua caminhada escolar o que, de início gerou momentos de inquietação, desconforto e vários questionamentos, tendo o pesquisador que explicar calmamente o que estava acontecendo e como eles deveriam agir. O conteúdo abordado nas atividades já tinha sido estudado por eles nas séries anteriores mas não como nos moldes da proposta didática, ou seja, a ênfase não estava apenas em aplicar a fórmula do Teorema mas em conjecturá-la e em seguida provar sua veracidade.

Anterior à realização desta pesquisa e do estudo de caso, acreditávamos que, por ser uma dupla formada por alunos do 3º ano do Ensino Médio as dificuldades seriam minimizadas mas nos deparamos com alunos que não compreenderam os enunciados das atividades, com dificuldades em algebrizar e apenas fazendo uso de fórmulas. Provas e demonstrações matemáticas são desconhecidas.

O encontro com atividades que carecem de uma prova ou demonstração, deixou transparecer a falta de conhecimento dos alunos sobre provas e demonstrações matemáticas. Fazemos esta observação levando em consideração notoriedade, importância e aplicabilidade que o Teorema de Pitágoras exerce na Matemática em todos os níveis de ensino. Podemos, daí, concluir que se os alunos participantes da pesquisa não possuem conhecimentos suficientes para provar ou demonstrar este teorema, o que pode ser estendido para outras preposições matemáticas presentes nos conteúdos matemáticos da educação básica, ante o que não conseguimos responder à pergunta que norteou nossa pesquisa.

Apesar do empenho dos alunos para resolver as atividades, observamos que a falta de conhecimento matemático dos mesmos não permitiu que fosse resolvida a maioria das atividades da proposta didática. Para amenizar esta situação acreditamos nas ideias de Hanna e Balacheff quando afirmam que devem ser proporcionadas aos alunos, já nas séries iniciais, atividades que necessitem de uma comprovação.

Numa esfera mais ampla, a utilização de provas e demonstrações matemáticas na educação básica precisa ser entendida como um caminho para se compreender e fazer Matemática em sala de aula. Agindo desta forma, pode-se contribuir para que as aulas de Matemática possibilitem um ambiente rico e motivador para que o aluno possa desenvolver e organizar estratégias que lhe venham permitir um novo olhar para a Matemática.

No caminhar da pesquisa, deparamo-nos com algumas limitações; uma delas foi a grande parte de literatura em outro idioma, pois este tema no Brasil ainda não está bem desenvolvido e as discussões precisam de estudos mais aprofundados; também encontramos dificuldades em elaborar uma proposta didática que englobasse o processo de provar ou demonstrar com significado para os alunos; demandamos muito tempo e discussão entre o processo de construção da proposta didática e sua aplicação; sempre procuramos sistematizar todas as atividades culminando em demonstração matemática.

Um dos aspectos que podem vir a ser considerados limitação, foi nossa falta de experiência na elaboração de uma proposta didática que abrangesse o tema prova e demonstrações matemáticas.

Acreditamos que nossa pesquisa venha a contribuir para desmitificar as provas e demonstrações matemáticas na educação básica e também sirva de fonte de pesquisa para que professores de Matemática da educação básica tenham conhecimento das potencialidades das provas e demonstrações matemáticas e as insiram em suas aulas. Esperamos, pois, que nosso trabalho desperte o interesse de novas pesquisas na tentativa de utilizar estas ferramentas no processo de ensino de aprendizagem da Matemática.

Seria muita pretensão de nossa parte em querer mudar a paradigma atual com a realização de nossa pesquisa, este nunca foi nosso propósito. Queríamos incentivar, trazer para discussão e mostrar que, agindo com bom senso, esses processos podem ser trazidos para as aulas de Matemática da educação básica brasileira. Algumas dessas mudanças podem ser realizadas pelo próprio professor; o poder de mudança se encontra na sua mão; afinal, é o professor responsável por refutar ou enaltecer os processos

metodológicos. Outras mudanças estarão sujeitas às vontades dos que fazem parte da administração educacional.

No que se refere às questões futuras, temos ciência de que é preciso a realização de estudos mais aprofundados e mais pesquisas sobre esta temática. Não temos a pretensão de atribuir um sentido mais amplo de generalização para a temática e, sim de ressaltar a necessidade efetiva de novas pesquisas que utilizem as provas e demonstrações matemáticas como recurso didático para o ensino e aprendizagem da Matemática.

Outra sugestão seria que, para amenizar o impacto negativo que o ato de provar ou demonstrar uma preposição matemática provoca nos alunos, atividades com essas características devem ser utilizadas gradativamente e trabalhadas com frequências nas aulas de matemática; assim acreditamos que ao finalizar sua caminhada escolar o aluno tenha compreensão do papel da prova e da demonstração matemática no processo de aprendizagem desta ciência. Por fim, outra contribuição que acreditamos que nossa pesquisa possa trazer, é que as provas e demonstrações matemáticas, quando utilizadas desde as séries iniciais, amenizam as dificuldades que os alunos apresentam em relação a alguns conceitos que deveriam ter sido assimilados e compreendidos no ensino fundamental e não no ensino médio.

Visando às contribuições que a nossa pesquisa possa vir a trazer para a comunidade cientifica da Educação Matemática percebemos que principalmente no Brasil ainda existe muito o que se estudar sobre esta temática. Acreditamos que quanto mais cedo os alunos tiverem contato com as provas e demonstrações matemáticas menores serão as barreiras a serem rompidas. Sentimo-nos recompensando se nossa pesquisa vier a estimular novas pesquisas a respeito do uso de provas e demonstrações matemáticas nas aulas da educação básica, quebrando um ciclo vicioso que não está contribuindo para a melhora do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Ressaltamos, aqui, que a Escola, através de sua direção, acolheu muito bem a ideia, permitindo que a equipe Provas e Demonstrações Matemática tivesse total liberdade para trabalhar suas atividades. O Diretor da Escola prontamente recebeu a equipe e se dispôs a ouvir a Profa. Dra. Abigail Fregni Lins, em relação à importância do tema para as aulas de Matemática e também sobre a importância da pesquisa para o processo de ensino e aprendizagem. Na ocasião também estavam presentes os professores de Matemática da Escola onde a pesquisa foi realizada; a equipe teve total liberdade para usar as dependências da Escola, como salas de aulas, sala de professores,

laboratório de informática, data show e material xerocopiado que seriam utilizadas pela equipe no desenvolvimento da pesquisa. Salientamos a colaboração dos professores de outras disciplinas que não colocaram obstáculos por disponibilizar o tempo de suas aulas visando à execução da pesquisa.

Enfim, finalizo este trabalho com a sensação do dever cumprido e na certeza de que, com os esforços demandados na realização desta pesquisa e a vontade aguerrida na realização deste trabalho, estaremos plenamente recompensados se o mesmo promover alguma utilidade, por simples que seja, para melhor compreensão do processo de provar e demonstrar por alunos e professores de Matemática da educação básica.

6. REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; FUSCO, C. A. Discutindo algumas dificuldades de professores dos ensinos Fundamental e Médio a respeito do conceito de demonstração. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2006, Água de Lindóia. **Anais eletrônicos...** Água de Lindóia: SBEM, 2006. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemIII.pdf. Acesso em: 09 de jun. de 2015.

ALMOULOUD, S. A.; FUSCO, C. A. Provas e demonstrações em matemática: uma questão problemática nas práticas docentes no ensino básico. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais eletrônicos...** Salvador: SBEM, 2010. Disponível em: http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/CC/T13_CC181.pdf. Acesso em: 09 de jun. de 2015.

ALMOULOUD, S. Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. In: REUNIÃO ANUAL ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 30., 2007, Caxambu. **Anais eletrônicos...** Caxambu: ANPEd, 2007. Disponível em: http://www.anped.org.br/reunioes/30ra/trabalhos/GT19-3614--Int.pdf. Acesso em: 09 de junho de 2015.

ANDRÉ, M. E. D. A. **Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional**. Brasília: Líber Livro Editora, 2005.

BALACHEFF, N. **Etudedesprocesses de preuve chez desélèves de collège. Thèse de doctoratdétaten-science**. Grenoble: Université Joseph Fournier, 1988a.

BALACHEFF, N**. Procesos de pruebaenlos alumnos de matemáticas**. Bogotá: una empresa docente y Universidad de los Andes, 2000.

BALACHEFF, N. Processus de preuveet sitations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 18, n. 2, p. 147-176, 1988b.

BALACHEFF, N. **Une étude des processus de preuveen mathématiques chez deséleves de collège.** Thèsed'étet, Grenoble: Université Joseph Fourier, 1988c.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos.** São Paulo: Atual, 1993.

BASTIAN, I. V. O Teorema de Pitágoras. 2000. 229f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 1998.

BUSQUINI, J. A.; SANTOS, V. M**.** Demonstração em geometria: significados de alunos. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais Eletrônicos...** Recife: UFPE 2011. Disponível em: http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/821.pdf. Acesso em: 09 jun. 2015.

COSTA, M. L. C. **Colaboração e grupo de estudos: perspectiva para o desenvolvimento profissional de professores de Matemática no uso de tecnologia.** 2011. 202 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.

COSTA, M. L.; LINS, A. F. Trabalho colaborativo e a utilização das tecnologias da informação e comunicação na formação do professor de Matemática. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, v. 12, n. 3, p. 452–470, 2010.

CRESCENTI, E. P. **Os professores de matemática e a geometria: opiniões sobre a área e seu ensino.** 2006. 252 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2006.

CROWLEY, M. L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e Ensinando Geometria.** São Paulo: Atual, 1994.

DE VILLIERS, M. Algumas Reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 12, n. 3, p. 400-31, 2010. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/view/192. Acesso em: 09 mai. 2015.

DE VILLIERS, M. D. Papel e funções da demonstração no trabalho com Sketchpad. **Revista Educação e Matemática**, p. 31-36. 2001.

DE VILLIERS, M. D. **Por uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica.** Tradução de Rita Bastos. Disponível em http.//mzone.mweb.co.za/residents/profmd/profmat2.pdf. Acesso em: 09 mai. 2015.

DE VILLIERS, M. **Para uma Compreensão dos Diferentes Papéis da Demonstração em Geometria Dinâmica.** Tradução de Rita Bastos. Actas ProfMat, Visue, Portugal, 2002. Disponível em: http://www.professores.uff.br/hjbortol/disciplinas/2006.2/esp00000/arquivos/profmat2.pdf. Acesso em: 15 jun. 2015.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos da matemática elementar 9: geometria plana.** 8.ed. São Paulo: Atual, 2005.

DUARTE, T. A possibilidade da investigação a 3: reflexões sobre triangulação (metodológica). **Cies e-workingpaper**, n. 60, 2009. Disponível em: http:// www.cies.iscte.pt/destaques/documents/CIES-WP60_Duarte_003.pdf. Acesso em: 05 mai. 2015.

EVES, H. **História da geometria**. Tradução: Hygino H. D. São Paulo: Atual, 1992.

FERNÁNDEZ, E. T. Didáctica de la geometria y demostración de propiedades. 2003. Disponível em: http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/DeLaTorre03.pdf. Acesso em: 15 jun. 2015.

FERREIRA FILHO, J. L. Um estudo sobre argumentação e prova envolvendo o Teorema de Pitágoras. 2007. 192 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FERREIRA, F. A. **Demonstrações em Geometria Euclidiana: Uma sequência Didática como recurso metodológico para seu ensino**. 2008. 67f. Dissertação

(Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

FLICK, U. **Uma introdução à pesquisa qualitativa**. Tradução de Sandra Netz. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

FOSSA, J. A. **Ensaios sobre a educação matemática**. Belém: EDUEPA, 2001.

FRANT, J. B. Geometria em questão. **Boletim: Salto para o futuro**. 2001. Disponível em: cdnbi.**tvescola**.org.br/resources/.../170843**Geometriaemquestao**.pdf. Acesso em: 20 jun. 2015.

GAMBOA, S. A. S. Pesquisa qualitativa: superando tecnicismos e falsos dualismos. **Contrapontos**, v. 3, n. 3, p. 393-405, 2003.

GARBI, G. G. **C. Q. D. Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GARNICA, A. V. M. As demonstrações em educação matemática: Um ensaio. **Bolema**, v. 15, n.18, p. 91-122, 2002.

HANNA, G**.** Challenges to the impact of proof. **For the learning of mathematics**, v. 15, n. 3, p. 42-49, 1995. Disponível em: http://flm-journal.org/Articles/7679867298F4CBEABE82D0ABEB5EC.pdf. Acesso em: 20 jun. 2015.

HANNA, G. Proof, explanation and exploration: An overview. **Educational Studies in Mathematics**, v. 44, p. 5-23, 2000. Disponível em: http://www.researchgate.net/publication/226598348_Proof_Explanation_and_Exploration_An_Overview. Acesso em: 20 jun. 2015.

HANNA, G.; JAHNKE, H. Proof and proving. In: **International Handbook of Mathematics Education**, p. 877-908, 1996.

JAHN, A. P.; HEALY, L.; COELHO, S. P. Concepções de professores de matemática sobre prova e seu ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa. In: REUNIÃO ANUAL ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 30., 2007, Caxambu. **Anais**

eletrônicos... Caxambu: 2007. Disponível em: http://www.anped.org.br/reunioes/30ra/trabalhos/GT19-3614--Int.pdf. Acesso em: 06 de mai. de 2014.

KALEFF, A. M. Tomando o ensino de Geometria em nossas mãos. **A Educação Matemática em Revista**, n. 2, p.19-25, 1994.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LINS, A. F. **Towards an Anti-Essentialist View of Technology in Mathematics Education**. 2003. 354f. Tese (Doutorado (PhD)), University of Bristol, UK, 2003.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**, ano 3, p.3-13, 1995.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas.** São Paulo: Pedagógica e Universitária, 1986.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pró-Posições**, v. 3, n. 1, p. 39-54, 1992.

MORAIS FILHO, D. C. **Um convite à matemática: fundamentos lógicos com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades**. 3. ed. Campina Grande: Fábrica de Ensino, 2010.

MOREIRA, H.; CALEFFE, L. G. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador**. 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

MOROZ, M.; GIANFALDONI, M. H. T. A. **O processo de pesquisa: iniciação.** 2. ed. Brasília: Liber Livro Editora, 2006.

NASSER, L. O desenvolvimento do raciocínio em Geometria. **Boletim do GEPEM**, ano XV, n. 27, p. 93-99, 1990.

NASSER, L.; TINOCO, L. (coord). **Curso Básico de Geometria: formação de conceitos geométricos**. Rio de Janeiro: Ed. IM/UFRJ, 2011.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. A. **Argumentação e provas no ensino de matemática**. 2 ed. Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão, 2003.

PAIS, L. C. **Ensinar e aprender Matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PARZYSZ, B. A geometria no ensino secundário e na formação de professores para séries iniciais: do que se trata? In: Quaderni di Ricerca in Didática, n. 17. Tradução de Coutinho e Almouloud, 2006.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, ano 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares**. 1991. 348 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Campinas, Campinas, 1991.

PIETROPAOLO, R. C. (**Re) Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores da educação básica**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, n. 25, p. 105-132, 2006.

PONTE, J. P.; BOAVIDA, A. M.; GRAÇA, M.; ABRANTES, P. **Didática da Matemática**. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário, 1997.

PONTE, J. P.; PEREIRA, J. M.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. **Práxis Educativa**, v.7, n. 2, p. 355-377, 2012.

REZENDE, J.; NASSER, L. Kinds of argumentation used in geometry. **Atas do PME – 18,** v. 1. p. 66, 1994.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Ed. Zahar. 2014.

SANTOS, M. C.; LINS, A. F. Concepções dos Professores de Mátemática sobre Pitágoras e as Demonstrações do seu Teorema Refletido na Aprendizagem dos Alunos o Ensino Médio**.** In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2013b, Montivideo. **Anais eletrônicos...** Montivideo: FISEM, 2013. Disponível em: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/675.pdf. Acesso em: 05 jun. 2015.

SANTOS, M. C.; LINS, A. F. Demonstrações do Teorema de Pitagoras na Perspectiva do Professor de Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2012, Campina Grande. **Anais eletrônicos...** Campina Grande: UEPB, 2012. Disponível em: http://editorarealize.com.br/revistas/enect/trabalhos/Comunicacao_529.pdf. Acesso em: 05 jun. 2015.

SANTOS, M. C.; LINS, A. F. Pitágoras e as Demonstrações do seu Teorema na Concepção de Alunos do Ensino Médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013a, Curitiba.**Anais eletrônicos...**Curitiba: PUCPR. Disponível em: http://sbem.esquiro. kinghost.net/anais/XIENEM /pdf/ 1717_630_ID. pdf. Acesso em: 05 jun. 2015.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Matemática: o currículo e a compreensão da realidade.** São Paulo, 1991. (Projeto Ipê).

SCHMITZ, C. C.; LEDUR, E. A.; MILANI, M. D. N. **Geometria de 1ª a 4ª série: uma brincadeira séria.** São Leopoldo, RS: UNISINOS, 1994.

SMOLE, K. C. S. Textos em Matemática: Por que não? In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em Educação**. São Paulo: Atlas, 1987.

USISKIN, Z. Resolvendo os dilemas permanentes da Geometria escolar. In: LINQUIST, M. M.; SHULTE, A.P. (Org.). **Aprendendo e ensinando Geometria**. Tradução de Higino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

VAN ZANTEN, A. Pesquisa qualitativa em educação: pertinência, validez e generalização. **PERSPECTIVA**, v. 22, n. 01, p. 25-45, 2004. Disponível em: http://ced.ufsc.br/nucleos/nup/perspectiva.html. Acesso em: 17 jun. 2015.

WALLE, J. A. V. **Matemática no ensino fundamental. Formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. Disponível em: www.Athena.mat.ufrgs.br/~portosil/result2.html. Acesso: 15 de jul 2015.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. Tradução de Daniel Grassi. 2.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Folha para Redação

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL

EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

REDAÇÃO

ALUNO(A): _____ **Série:** _____

Data: _____/_____/2015

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!

APÊNDICE B – Redação – Dupla A – Juliana

uepb Universidade ESTADUAL DA PARAÍBA

TRABALHO COLABORATIVO COM PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA EM ESCOLAS PÚBLICAS DAS REGIÕES NORDESTE E CENTRO - OESTE

A

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA

PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL

EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

REDAÇÂO

ALUNO(A): _____ **- SÉRIE:** 3°B

DATA: 15 / 06 /2015

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Com o passar do tempo o ser humano passou a buscar explicações para vários acontecimentos em sua volta. Dentre eles surgiram as explicações matemáticas, estudados inicialmente na Grecia Antiga, pelo filosofo pitágoras que também fundou uma escola, a chamada "Escola pitágorica", com o intuito de explicar acontecimentos do dia-a-dia, através de equações matemáticas. Mas séra que tais explicações e afirmações possui papel relevante na sociedade atual?

Na sociedade capitalista na qual vivemos hoje, pode-se dizer que as afirmações matemáticas são fundamentais. A todo tempo se faz necessário a resolução de problemas que envolve equações ou até mesmo demostrações matemáticas. Ex; Já que estamos falando sobre sociedade capitalista, nada melhor que abordar ~~nessa~~ a matemática financeira, que com seus juros simples e compostos entre outros, faz com que a economia movimente em nosso País.

Desse modo, pode-se inferir que as afirmações e explicações matemáticas assim como na época de pitágoras, possui ~~pat~~ papel fundamental nos dias atuais.

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!

APÊNDICE C – Redação – Dupla A – Willian

uepb Universidade ESTADUAL DA PARAÍBA

TRABALHO COLABORATIVO COM PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA EM ESCOLAS PÚBLICAS DAS REGIÕES NORDESTE E CENTRO - OESTE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA

PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL

EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

REDAÇÂO

ALUNO(A): _____ **- SÉRIE:** 3º B

DATA: 25 / 06 **/2015**

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

A matemática é com toda certeza uma das mais fascinantes ciências que existe. Um dos muitos motivos pelos quais muitas pessoas aprenderam a gostar da matemática é poder provar se uma determinada afirmação é realmente verdadeira ou não.

Seja qual for o tipo de operação matemática em todas das podemos provar na prática se o resultado está correto. Mas ainda assim existem pessoas que não gostam muito dessa matéria, bom o motivo pelos quais algumas pessoas não gostam não sei o certo mas o fato é que a matemática é de uma extrema importância para o ser humano. Podemos ver que a matemática está por toda parte em nossa volta. Por isso mesmo sem gostar devemos aprender matemática.

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!

APÊNDICE D – Proposta Didática

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL

EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

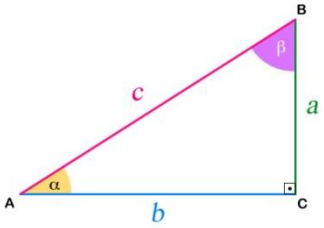
PROPOSTA DIDÁTICA

DESAFIANDO NOSSO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Dupla: _____ Série: ____

_____ Data: __/__/__

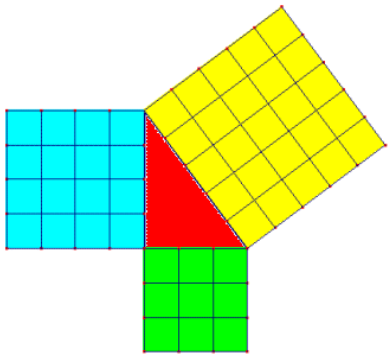
(1) (nossa autoria) Observem o triângulo ABC retângulo em C. Com base em suas observações, determinem e justifiquem:



a) Como identificar um triângulo retângulo?
b) os catetos:
c) a hipotenusa:
d) o ângulo reto (90°)
e) os ângulos agudos

(2)(nossa autoria) De acordo com Eves (2004) e Boyer (2010), os povos antigos, acerca de 3000 anos, como egípcios e babilônicos, sabiam que o triângulo de lados 3, 4 e 5 era retângulo, mas de acordo com Lima (2006), esses povos não tinham a necessidade de demonstrar esta afirmação.

Na Figura abaixo temos um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 unidades de comprimento:



Foram construídos quadrados com os lados desse triângulo. Esses quadrados foram divididos em quadrados menores, como vocês podem observar na Figura. Respondam:

a) Quantos quadradinhos tem o quadrado maior?

b) Qual é o número de quadradinhos do quadrado intermediário?

c) Qual a quantidade de quadradinhos em que o quadrado menor foi dividido?

d) De acordo com as respostas dos itens a, b e c, vocês conseguem observar alguma relação entre o quadrado maior e os outros menores?

(3) (extraído de Bastian, 2000) No quadro abaixo, a medida de cada cateto e da hipotenusa são lados dos quadrados A, B e C respectivamente. Com base nesta informação, calculem as áreas A, B e C:

			Áreas dos Quadrados		
Cateto a	**Cateto b**	**Hipotenusa c**	**Área A**	**Área B**	**Área C**
3	**4**	**5**			
6	**8**	**10**			
5	**12**	**13**			
9	**12**	**15**			

a) Comparando as áreas A, B e C, a que conclusão vocês chegaram?

b) Será que a conclusão descrita acima, no item (a), vale para qualquer triângulo? Experimentem usá-la em um triângulo de lados 4, 7 e 8. O que vocês observaram?

(4) (extraído de Bastian, 2000)

a) Desenhem e recortem um triângulo retângulo qualquer. Agora desenhem e recortem mais sete triângulos idênticos ao primeiro, identificando seus referidos lados como a, b e c.

b) Agora desenhem e recortem um:

- ✓ Quadrado de tamanho igual ao lado *a* (pinte de vermelho)
- ✓ Quadrado de tamanho ao lado *b* (pinte de amarelo)
- ✓ Quadrado de tamanho ao lado *c* (pinte de verde)

c) como se fosse um quebra cabeças montem:

- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e o quadrado vermelho
- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e os quadrados amarelos e verdes
- ✓ Se retirarmos das duas figuras montadas os quatro triângulos, o que podemos dizer sobre as áreas restantes de cada figura?
- ✓ Existe alguma relação entre as áreas restantes? Como podemos escrever esta relação?

(5) (extraído de Bastian, 2000)

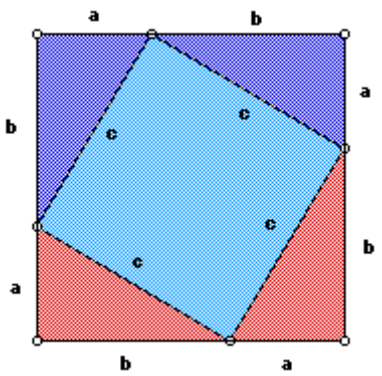


Figura 1

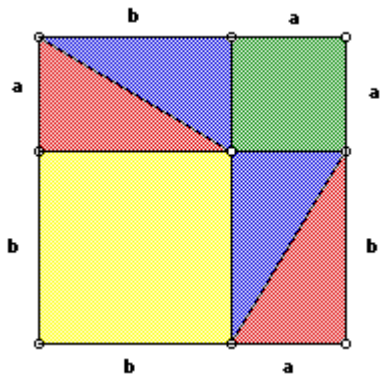


Figura 2

a) Descrevam algebricamente a área do quadradão (Figura 1) em função do quadrado contido nele e dos quatros triângulos retângulos.

b) Façam o mesmo na Figura 2.

c) Que relação existe entre as áreas dos quadradões das Figuras 1 e 2? Deduzam a relação entre a, b e c.

(6) (nossa autoria) Um teorema é uma afirmação matemática que deve ser rigorosamente demonstrada. Sendo assim, para que o Teorema de Pitágoras seja válido é necessário demonstrá-lo. Podemos escrever o Teorema de Pitágoras na forma implicativa: *Se o triângulo é retângulo então a área do quadrado que tem como lado a medida da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos catetos são os lados.*

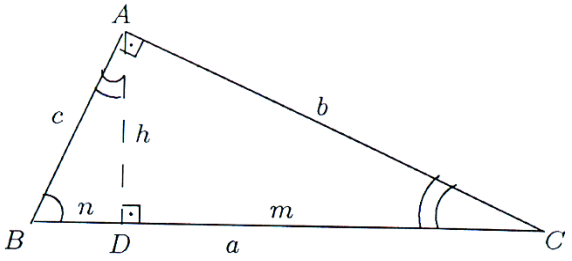
No Teorema escrito na forma implicativa, identifiquem:

a) Hipótese

b) Tese

(7) (adaptado de Lima, 2006)

No triângulo ABC, retângulo em A, a altura AD (perpendicular a BC) relativa à hipotenusa origina dois triângulos semelhantes ao próprio triângulo, em vista da congruência dos ângulos (BÂD = $\widehat{C}$, complemento de $\widehat{B}$, CÂD = $\widehat{B}$, complemento de $\widehat{C}$). Portanto, temos proporcionalidade entre os lados homólogos, uma para cada triângulo parcial ou total:



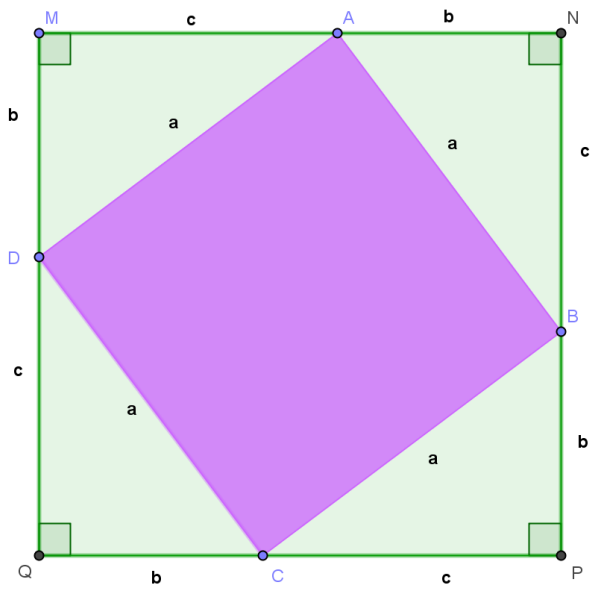
$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \; e \; \frac{b}{a} = \frac{m}{b}$$

Usando as informações acima, tentem demonstrar o Teorema de Pitágoras.

PARTE II

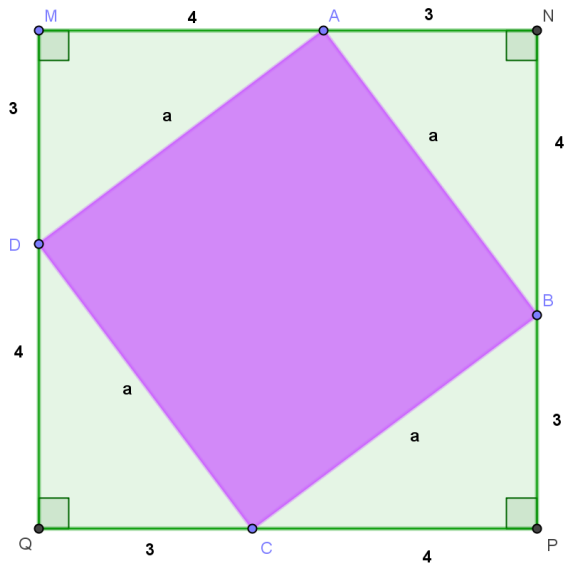
(8) (adaptado de Ferreira Filho, 2007)

a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem.



b) Calcule o valor de a, da figura acima, em função de b e c utilizando o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos.

c) Observem o desenho abaixo e calculem o valor de a em função de 3 e 4 usando apenas o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos:



d) Comparem com o resultado obtido na letra b. O que vocês observam?

e) Comparem a conclusão obtida na letra b com a conclusão obtida na letra c e respondam:

- ✓ As duas conclusões são equivalentes (iguais)?
- ✓ Em qual dos dois processos (letra *b* ou letra *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem.

(1) (adaptado da questão G1 do AprovaME) Amanda, Dario, Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.

Eu obtenho uma linha reta que é 180°.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180°.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

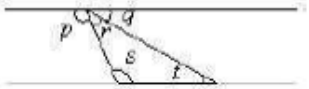
Resposta de Hélia

Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.

(90° – 28°) + 28° + 42° + (90° – 42°) = 180°
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:



Afirmações	Justificativa
$p = s$.....	Ângulos alternos internos
entre	duas paralelas são iguais.
$q = t$	Ângulos alternos internos
entre	duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180°$.....	Ângulos numa linha reta.

Logo $s + t + r = 180°$
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

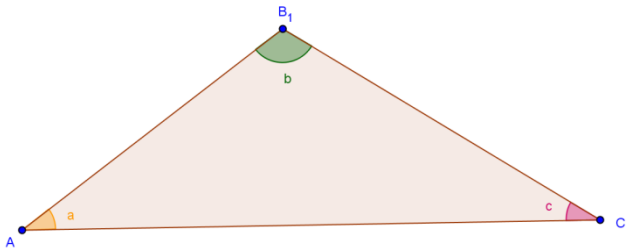
Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360°. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540°. 540° – 360° = 180°.

Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

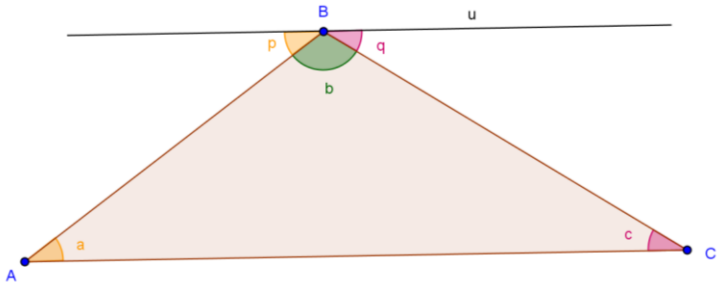
a) Das respostas acima, escolham uma que é a mais parecida com a resposta que vocês dariam se tivessem que resolver esta questão. Justifiquem sua escolha.

b) Das respostas acima, escolham aquela para a qual vocês acham que seu professor daria a melhor nota. Justifiquem sua escolha.

(2) (nossa autoria) Considerem um triângulo ABC, no qual estão assinalados os ângulos internos:



Traçando a reta *u*, paralela ao lado AC e que passa pelo vértice B:



Sabemos que p = a e q = c.

Como p + b + q = 180º, concluímos que a + b + c = 180º.

Observando essa demonstração, respondam o que se pede:

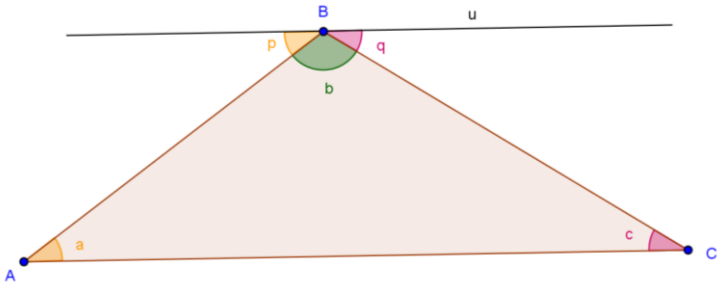
a) Por que podemos afirmar que p = a e q = c?

b) O que podemos afirmar com essa conclusão da demonstração?

c) Essa afirmação vale para qualquer triângulo? Justifiquem.

d) Tente demonstrar essa afirmação de outra forma.

(3) (nossa autoria) Seja um triângulo ABC qualquer com ângulos internos a, b e c. A figura abaixo ilustra uma construção geométrica que auxilia na demonstração da propriedade de que "em todo triângulo a soma dos ângulos internos é 180°":



a) Como são chamados os elementos geométricos representados por u, B, a e $\overline{AC}$?

b) Vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual (is)?

c) Coloquem em ordem, de 1 a 5, as frases abaixo a fim de obter a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo:

( ) $p + b + q = 180°$

( ) Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c

( ) $p = a$ e $q = c$, pois, são ângulos alternos internos

( ) Pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ obtendo $\hat{p}$ e $\hat{q}$

( ) Conclusão: $a + b + c = 180°$.

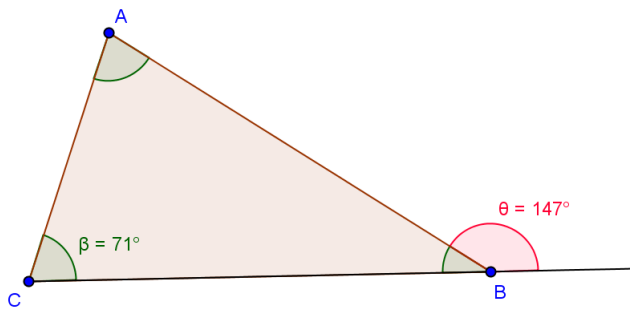
d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

PARTE III

(1) (nossa autoria) Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.

a) Na Geometria Euclidiana usamos com certa frequência o teorema do ângulo externo para cálculos de ângulos. Descrevam o que vocês conhecem sobre este teorema.

b) Dado o triângulo ABC, determinem as medidas dos ângulos internos que faltam.

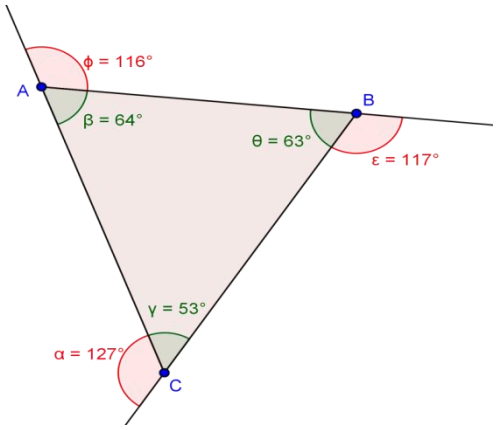


c) Observem que $\theta > B\hat{A}C$ assim como também $\theta > A\hat{C}B$. Será que esta relação vale para todo triângulo? Justifiquem.

d) Se tomarmos ABC como sendo um triângulo retângulo, essas relações ainda valeriam? Justifiquem.

(2) (nossa autoria) Nas alternativas I, II, III, marquem qual delas vocês descreveriam como demonstração do teorema do ângulo externo, descrito na Questão 1. Ao final, justifiquem sua escolha.

I ( ) Dado um triângulo qualquer ABC e sejam $\beta = 64º$, $\theta = 63º$ e $Y = 53º$,as medidas dos ângulos. Como descrito na figura abaixo:



Observem:

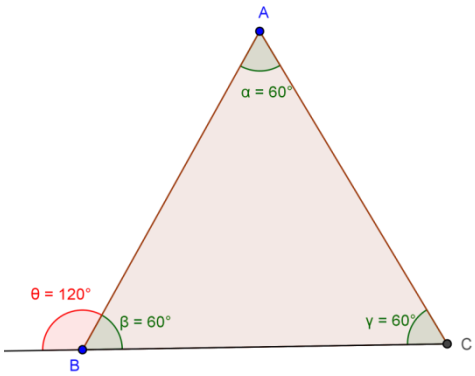
Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{BC}$ formaremos o ângulo α, onde $\alpha = 127º$.

Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{CA}$ formaremos o ângulo Φ, onde $\Phi = 116º$.

Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{AB}$ formaremos o ângulo ε, onde $\varepsilon = 117º$.

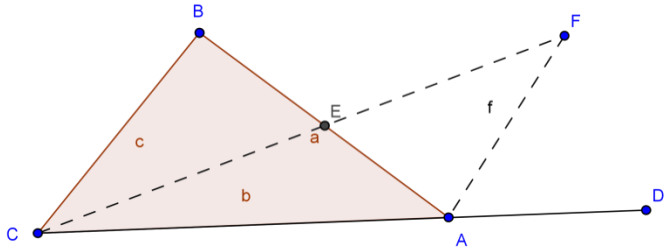
Note que, $\alpha > C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$, assim como $\beta > A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$, assim como também $\theta > C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$, como queríamos demonstrar.

II ( ) Tomemos o triângulo equilátero ABC descrito na figura abaixo:



Como se trata de um triângulo equilátero, sabemos que o ângulo $B\hat{C}A = C\hat{A}B = A\hat{B}C =$ *60º. Ao prologarmos a semirreta* $\overrightarrow{BC}$ *formaremos o ângulo θ, que mede 120º, além disso, note que,* $\theta = 120^o > 60^o = B\hat{C}A = C\hat{A}B = A\hat{B}C$*. Logo fica demonstrado o teorema.*

III ( ) Seja ABC um triângulo. Na semirreta $\overrightarrow{CA}$*, marque um ponto D tal que o ponto A esteja entre os pontos C e D, como indicado na figura abaixo:*
Queremos provar que o ângulo $B\hat{A}D > \hat{B}$ *e* $B\hat{A}D > \hat{C}$*. Vamos primeiro provar que o ângulo* $B\hat{A}D > \hat{B}$*. Para isto consideremos o ponto médio E do segmento* $\overline{AB}$*.*



Na semirreta $\overrightarrow{CE}$ *marque um ponto F tal que, o segmento* $\overline{CE} = \overline{EF}$*. Trace* $\overline{AF}$*. Compare os triângulos CEB e FAE. Como* $\overline{BE} = \overline{AE}$ *(já que E é ponto médio de AB),* $\overline{CE} = \overline{EF}$ *(por construção) e* $B\hat{E}C = A\hat{E}F$ *(por serem opostos pelo vértice), segue-se que o ângulo* $B\hat{E}C = A\hat{E}F$*. Consequentemente* $\hat{B} = E\hat{A}F$*, como a semirreta* $\overrightarrow{AF}$ *divide o ângulo* $B\hat{A}D$*, então* $E\hat{A}F < B\hat{A}D$*, portanto* $\hat{B} < B\hat{A}D$*. Analogamente provamos que* $B\hat{A}D > C$*. Assim fica demonstrado o teorema.*

Justifiquem a escolha:

Parte IV

(1) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-27567" e observem atentamente a figura. Sigam as instruções abaixo e respondam às perguntas:

a) Arrastem o seletor para a direita. O que aconteceu com a figura? Quais os movimentos observados pelas três divisões do triângulo?

b) Arrastem o próximo seletor para baixo. O que aconteceu com a figura? Qual o movimento realizado pelas três divisões do triângulo? O que vocês observaram após essa movimentação?

c) Marquem os três quadrados referentes a "comparar ângulos". O que vocês observaram? Como podem ser chamados os ângulos azuis, vermelhos e verdes? Por quê?

d) Qual propriedade está ligada a essa verificação? Como vocês encontraram essa propriedade e por quê?

(2) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-239787" e observem a figura.

Há uma importante relação relacionada aos triângulos e seus ângulos internos. Sigam as instruções abaixo e respondam às perguntas:

a) Movimentem o vértice C do triângulo. O que acontece com o triângulo? E com seus ângulos internos?

b) Ao movimentar esse vértice C, qual a relação entre os triângulos encontrados e seus ângulos internos?

c) Agora movimentem o vértice B. O que acontece? Continua valendo essa relação para outros triângulos encontrados e seus ângulos internos?

d) Se movimentarmos o vértice A. O que acontece? Essa relação continua sendo válida?

e) Desse modo, o que podemos concluir com essa verificação? Justifiquem.

(3) (extraído do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-145257", observem a figura e respondam o que se pede.

(4) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-57095" e observem a figura. Sigam as instruções e respondam o que se pede:

a) Movimentem os seletores dos ângulos α e β. O que aconteceu ao movimentar o ângulo α? E o ângulo β? As duas figuras foram movimentadas para onde? Como elas ficaram nessas movimentações?

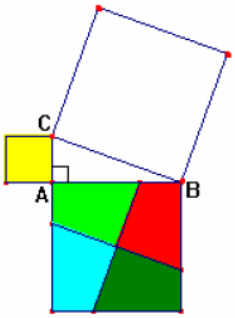
b) Surgiu um novo seletor. Movimentem o ângulo γ. O que aconteceu ao movimentar esse ângulo?

c) Surgiu um novo seletor. Movimente o ângulo δ. O que aconteceu ao movimentar esse ângulo?

d) Ao fazer todos esses movimentos, o que vocês observaram? A que conclusões vocês chegaram?

e) Existe alguma relação entre esses quadrados e os lados do triângulo retângulo? Se sim, qual?

(5) (adaptado de Ferreira Filho, 2007)



Abram o arquivo *Montagem – Perigal* e observem, antes de fazer qualquer movimento, a imagem atenta e detalhadamente.

Na figura temos 5 peças coloridas, 4 dentro do quadrado médio e uma no quadrado menor. Arrastem cada uma das peças, encaixando-as dentro do quadrado maior.

Façam o que se pede:

a) O que vocês observaram? Relacionem as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. O que vocês concluíram?

b) Representem a medida da hipotenusa do triângulo retângulo por a, e por b e c as medidas de cada cateto. Relacionem as três medidas.

c) A verificação feita com esse arquivo é confiável, suficiente e dá certeza de que a relação obtida no item b é sempre válida em qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.

d) No GeoGebra, construam um triângulo retângulo ABC qualquer. Com a ferramenta "distância, comprimento ou perímetro", meçam os lados de seu triângulo e com uma calculadora verifiquem a relação percebida anteriormente. O que vocês concluíram?

e) A verificação feita no item d garante que a relação vale sempre para qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!

APÊNDICE E – Parte I da Proposta Didática Resolvida pela Dupla A

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL

EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

PROPOSTA DIDÁTICA

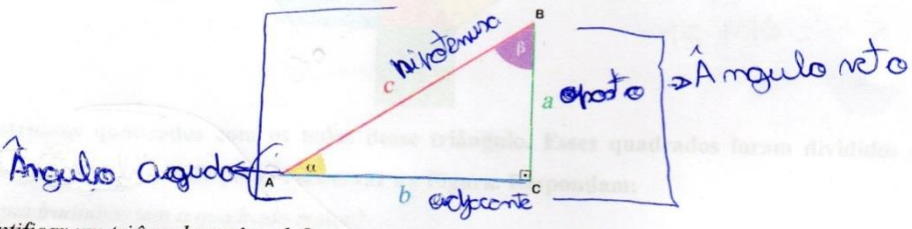
DESAFIANDO NOSSO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Dupla: _____ **Série:** 3ºB

Data: 17 / 06 / 15

PARTE I

(1) (nossa autoria) Observem o triângulo ABC retângulo em C. Com base em suas observações, determinem e justifiquem:



a) Como identificar um triângulo retângulo?

Indentificamos um triangulo retângulo quando o angulo é igual a 90°

b) os catetos:

Temos dois catetos; oposto e adjacente (lados)
(a) (b)

c) a hipotenusa:

É o lado maior do triângulo, que possui por sua vez maior inclinação (C)

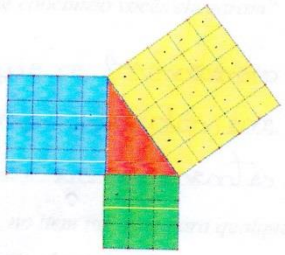
d) o ângulo reto (90°)

Encontro ~~duas~~ dos duas semi-retas ~~(a, b)~~ (B, C)

e) os ângulos agudos

Encontro entre as duas semi-retas (A, B), que partem da mesma origem.

(2) (nossa autoria) De acordo com Eves (2004) e Boyer (2010), os povos antigos, acerca de 3000 anos, como egípcios e babilônicos, sabiam que o triângulo de lados 3, 4 e 5 era retângulo, mas de acordo com Lima (2006), esses povos não tinham a necessidade de demonstrar esta afirmação.
Na Figura abaixo temos um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 unidades de comprimento:



16 + 9 =
25 + 16 = 25

Foram construídos quadrados com os lados desse triângulo. Esses quadrados foram divididos em quadrados menores, como vocês podem observar na Figura. Respondam:

a) Quantos quadradinhos tem o quadrado maior?

O quadrado maior, apresenta 25 quadradinhos

b) Qual é o número de quadradinhos do quadrado intermediário?

O quadrado intermediário contém 16 quadradinhos

c) Qual a quantidade de quadradinhos em que o quadrado menor foi dividido?

O quadrado menor, apresenta 9, quadradinhos

d) De acordo com as respostas dos itens a, b e c, vocês conseguem observar alguma relação entre o quadrado maior e os outros menores?

A relação que pode se observa, é que a soma dos quadrados menores é igual ao numero de quadrados do maior.

(3) (extraído de Bastian, 2000) No quadro abaixo, a medida de cada cateto e da hipotenusa são lados dos quadrados A, B e C respectivamente. Com base nesta informação, calculem as áreas A, B e C:

			Áreas dos Quadrados		
Cateto a	**Cateto b**	**Hipotenusa c**	**Área A**	**Área B**	**Área C**
3	**4**	**5**	9	16	25
6	**8**	**10**	36	64	100
5	**12**	**13**	25	144	169
9	**12**	**15**	81	144	225
			157	368	519

a) Comparando as áreas A, B e C, a que conclusão vocês chegaram?

Chegamos a conclusão, que se formassemos um triângulo com a ~~esse~~ soma das áreas obtidas, esse triângulo seria escaleno onde todos seus lados são diferentes (Porque a soma das áreas são diferentes

b) Será que a conclusão descrita acima, no item (a), vale para qualquer triângulo? Experimentem usá-la em um triângulo de lados 4, 7 e 8. O que vocês observaram?

Não, vale apenas para o escaleno. 4 8 7 = Triangulo escaleno, nesse quase a afirmação acima valeria para esse triângulo.

(4) (extraído de Bastian, 2000)

a) Desenhem e recortem um triângulo retângulo qualquer. Agora desenhem e recortem mais sete triângulos idênticos ao primeiro, identificando seus referidos lados como a, b e c.

b) Agora desenhem e recortem um:

- ✓ Quadrado de tamanho igual ao lado *a* (pinte de vermelho)
- ✓ Quadrado de tamanho ao lado *b* (pinte de amarelo)
- ✓ Quadrado de tamanho ao lado *c* (pinte de verde)

c) como se fosse um quebra cabeças montem:

- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e o quadrado vermelho
- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e os quadrados amarelo e verde

Dupla: _____ - Série: 3°B

_____

Data: 02 / 07 / 15 Duração: ____/____/____

(5) (Extraída de Bastian, 2000) Sobre o Teorema de Pitágoras:

a) Desenhem e recortem um triângulo retângulo qualquer. Agora desenhem e recortem mais sete triângulos idênticos ao primeiro.

b) Agora desenhem e recortem um:

- ✓ Quadrado de tamanho do lado *a* que vocês determinaram nos desenhos e recortes do item (a) (pinte de vermelho)
- ✓ Quadrado de tamanho do lado b (pinte de amarelo)
- ✓ Quadrado de tamanho do lado c (pinte de verde)

c) como se fosse um quebra-cabeças montem:

- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e o quadrado vermelho
- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e os quadrados amarelo e verde
- ✓ Se retirarmos das duas figuras montadas os quatros triângulos, o que podemos dizer sobre as áreas restantes de cada figura.
- ✓ Existe alguma relação entre as áreas restantes? Como podemos escrever esta relação?

A relação que se pode observa é que a soma dos quadrados menores era igual a area do quadrado maior que esta diretamente relacionado com o teorema de pitágoras.

Se retirarmos das duas figuras montadas os quatro triângulos, o que podemos dizer sobre as áreas restantes de cada figura?

Existe alguma relação entre as áreas restantes? Como podemos escrever esta relação?

(5) (extraído de Bastian, 2000)

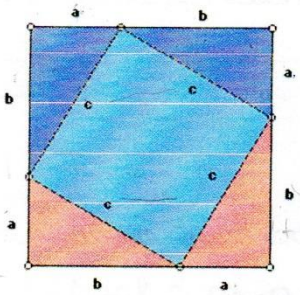


Figura 1

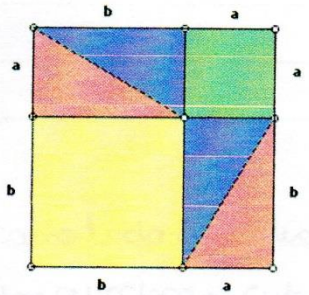


Figura 2

a) Descrevam algebricamente a área do quadradão (Figura 1) em função do quadrado contido nele e dos quatros triângulos retângulos.

$a^4 + b^4 + c^4$

b) Façam o mesmo na Figura 2.

c) Que relação existe entre as áreas dos quadradões das Figuras 1 e 2? Deduzam a relação entre a, b e c.

(6) (nossa autoria) Um teorema é uma afirmação matemática que deve ser rigorosamente demonstrada. Sendo assim, para que o Teorema de Pitágoras seja válido é necessário demonstrá-lo. Podemos escrever o Teorema de Pitágoras na forma implicativa: ***Se o triângulo é retângulo, então a área do quadrado que tem como lado a medida da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos catetos são os lados.***

No Teorema escrito na forma implicativa, identifiquem:

a) Hipótese

Se o triângulo é retangulo...

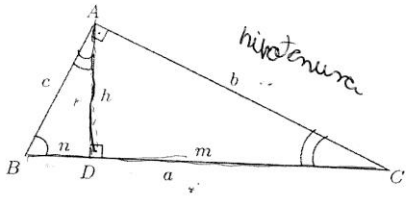
b) Tese

Então a área do quadrado que tem como lado a medida da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos catetos são os lados.

(7) (adaptado de Lima, 2006)

No triângulo ABC, retângulo em A, a altura AD (perpendicular a BC) relativa à hipotenusa origina dois triângulos semelhantes ao próprio triângulo, em vista da congruência dos ângulos (BÂD = $\widehat{C}$, complemento de $\widehat{B}$, CÂD = $\widehat{B}$, complemento de $\widehat{C}$). Portanto, temos proporcionalidade entre os lados homólogos, uma para cada triângulo parcial ou total:

-Triângulo ABD
Triangulo ADC



$a^2 = b^2 + c^2$
$b^2 = a^2 + c^2$
Hipotenusa

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \text{ e } \frac{b}{a} = \frac{m}{b}$$

Usando as informações acima, tentem demonstrar o Teorema de Pitágoras.

APÊDNICE F – Questionário Final

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL

EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

PROPOSTA DIDÁTICA

DESAFIANDO NOSSO PENSAMENTO MATEMÁTICO

(QUESTIONÁRIO FINAL – ALUNOS)

Data: _____

Dupla:_____

_____

1. Qual o seu ponto de vista em relação à aplicação da proposta didática?
2. No seu entendimento, qual foi o objetivo da aplicação da proposta didática?
3. Ao resolver as atividades propostas você percebeu alguma relação entre elas?
4. Quais foram suas dificuldades na resolução das atividades propostas?
5. Expliquem suas respostas em cada atividade

Atividade 1:

Atividade 2:

Atividade 3:

Atividade 4:

Atividade 5:

Atividade 6:

Atividade 7:

6. De acordo com os seus conhecimentos, construa uma demonstração para o Teorema de Pitágoras.
7. Descreva o que foi a intervenção didática para cada um de vocês da dupla.
8. A intervenção didática auxiliou cada um de vocês na resolução da proposta didática? Se sim, explique. Se não, justifique.

APÊDNICE G – Questionário Final Respondido pela Dupla A

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL

EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

PROPOSTA DIDÁTICA

DESAFIANDO NOSSO PENSAMENTO MATEMÁTICO

(QUESTIONÁRIO FINAL – ALUNOS)

Data: 11/08/15

Dupla:

1. Qual o seu ponto de vista em relação à aplicação da proposta didática?

Foi positivo, ~~foi~~ para avaliação do nosso conhecimento matematico.

2. No seu entendimento, qual foi o objetivo da aplicação da proposta didática?

Analisar como anda os conhecimentos dos alunos sobre a materia dada em sala de aula.

3. Ao resolver as atividades propostas você percebeu alguma relação entre elas?

Sim, Todos falam sobre ângulos

4. Quais foram suas dificuldades na resolução das atividades propostas?

Apresentamos dificuldades em lembrar das formulas

5. Expliquem suas respostas em cada atividade

Atividade 1:

nesta questão, indentificamos um triângulo, porque ~~porqu~~ o seu ângulo é igual a 90°; entre outras caracteristicas que mostram que esse é um triângulo retangulo como: hipotenusa, cateto oposto e adyacente.

Atividade 2:

nesta questão, concluimos que a soma dos quadrados menores era a soma do quadrado maior.

Atividade 3:

nesta questão, concluimos que se usassemos os números fornecidos, ele apresentaria um triângulo escaleno, com todos seus lados diferentes.

Atividade 4:

nós fizemos tal atividade, a partir de recortes de triângulos retângulos e quadrados, por nós desenhados e a partir dos mesmos, percebemos a relação, que se unissemos, esses ~~ret~~ triângulos com quadrados obteríamos um quadrado maior

Atividade 5:

Não conseguimos fazer essa questão, pois, como era álgebra e não números ficou difícil o entendimento, para que chegassemos a função pedida pela questão.

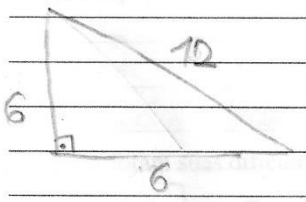
Atividade 6:

nesta questão, chegamos a conclusão que, para que se faça feita uma afirmação matemática, precisaríamos de uma hipótese: o que é levantado. e uma tese que ratifica essa hipótese

Atividade 7:

nesta questão, retiramos dados a cerca da hipotenusa cateto oposto e adjacente, assim chegando a inseri-los no teorema de pitágoras = $a^2 = b^2 + c^2$

6. De acordo com os seus conhecimentos construa uma demonstração para o Teorema de Pitágoras.



$a^2 = b^2 + c^2$

$12^2 = 6^2 + 6^2$

$144 = 36 + 36$

$144 = 72$

7. Descreva o que foi a intervenção didática para cada um de vocês da dupla.

A proposta didática, foi muito promissora, pois nos fez relembrar alguns conceitos básicos sobre ângulos que antes já tinhamos visto, e por falta de atenção dentre outros fatores passou desapercebidos. Alem disso, nos auxiliou a resolver problemas de outros óreas na matematica, uma vez que o teorema de pitágoras e uma ferramenta fundamental na matematica

8. A intervenção didática auxiliou cada um de vocês na resolução da proposta didática? Se sim, explique. Se não, justifique.

Sim, sem antes haver essa intervenção é certo que não teríamos todo o conhecimento necessário para responder as questões propostas.

AGRADECEMOS SUA PARTICIPAÇÃO!!!

7. Descreva o que foi a intervenção didática para cada um de vocês da dupla.

a intervenção didática do professor para mim foi algo de extrema importância para que pudesemos desenvolver as questões solicitadas nesta atividade.

8. A intervenção didática auxiliou cada um de vocês na resolução da proposta didática? Se sim, explique. Se não, justifique.

Sim a intervenção didática nos auxiliou bastante na resolução das propostas, pois através dessa intervenção é que nós foi possivel responder ao maior número possivel de questões.

AGRADECEMOS SUA PARTICIPAÇÃO!!!